Početní písemná část z Matematiky II (C) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Spočtěte hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & x-4 & y-5z-12 \\ 9 & 0 & 6 & 9 & 4-z \\ 7 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 10 & -3 & 13 & 10 & 13 \\ 3 & 6 & -15 & 3 & -15 \end{pmatrix}. \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos\left(x - \cos y\right),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 0, f(1,0)]$.

(9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\log \frac{\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} y}{3} + \log \frac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{3} = 0$$

určuje v nějakém okolí bodu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\frac{\pi}{4})$ a $f''(\frac{\pi}{4})$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4})]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = x - y^2 - 2z, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 \le 2, (x-2z)^2 + y^2 = 5\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad 1:

$$\text{Hodnost je} \begin{cases} 5 & \text{pokud } x \neq 1 \text{ a } z \neq -2, \\ 4 & \text{pokud } x \neq 1 \text{ a } z = -2, \text{ nebo } x = 1 \text{ a } z \neq -2, \\ & \text{nebo } x = 1, z = -2 \text{ a } y \neq 3, \\ 3 & \text{pokud } x = 1, z = -2, y = 3. \end{cases}$$

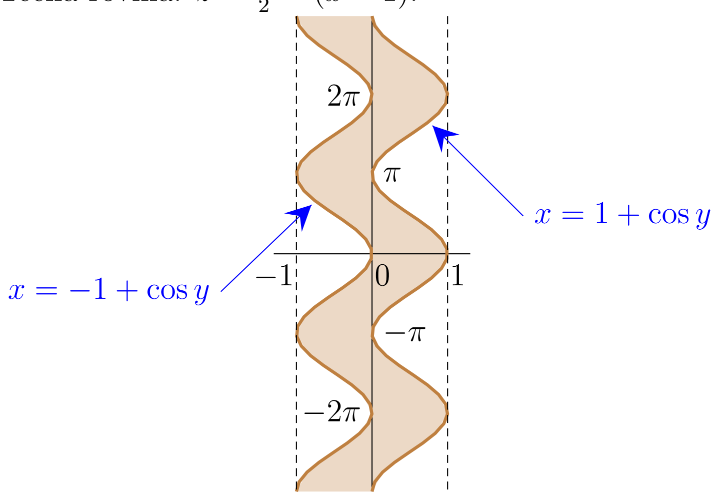
Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1 + \cos y \leq x \leq 1 + \cos y\}$ (obrázek viz níže, hranice je součástí definičního oboru). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sin y}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}}$ pokud $-1 + \cos y < x < 1 + \cos y$ (tj. na vnitřku D_f).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodech $[0, k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. (V ostatních případech D_f neobsahuje svislou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial y}(0, k\pi)$ neexistuje.

Tečná rovina: $z = \frac{\pi}{2} - (x - 1)$.



Příklad 3: $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$, $f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{32}{9}$. Rovnice tečny: $y = \frac{\pi}{4} - (x - \frac{\pi}{4})$ (tj. $y = \frac{\pi}{2} - x$).

Příklad 4: Minimum -3 v bodech $[0, \pm 1, 1]$, maximum $\sqrt{5}$ v bodech $[x, 0, \frac{x-\sqrt{5}}{2}]$, $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

Příklad 5: Řada konverguje neabsolutně. Řada absolutních hodnot lze srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Lze použít Leibnizovo kritérium.