Početní písemná část z Matematiky II (B) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Spočtěte inverzní matici k matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 120 & 24 & 6 & 2 \\ 120 & 24 & 6 & 6 \\ 120 & 24 & 24 & 24 \\ 120 & 120 & 120 & 120 \end{pmatrix}.$$

Návod: Uvažte matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením prvního řádku číslem $\frac{1}{2}$, druhého řádku $\frac{1}{6}$, třetího řádku $\frac{1}{24}$ a čtvrtého řádku $\frac{1}{120}$, nejprve spočtěte $\mathbb{B}^{-1}$ a z toho odvoďte tvar $\mathbb{A}^{-1}$. (8 bodů)

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log\left(e^3 - e^{|x|+2|y|}\right),$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2})]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\sin(e^x - e^y) + 3\sin\frac{x+y}{2} + \cos(x-y) = 1$$

určuje v nějakém okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\pi)$ a $f''(\pi)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[\pi, f(\pi)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = x^2+5z^2+2y^2, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon (x-z)^2+y^2 = 4, x-7y-z+2 \geq 0\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$$

(10 bodů)

Výsledky

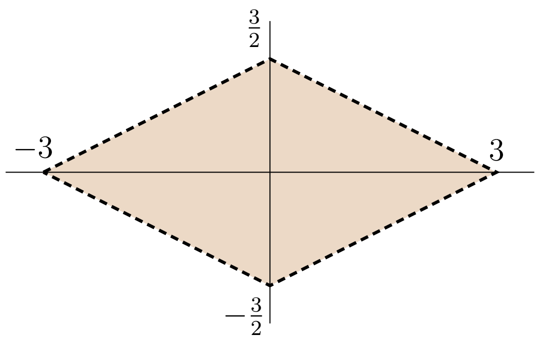
Příklad 1:

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{19}{12} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{11}{6} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{96} & -\frac{1}{480} \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{19}{288} & \frac{1}{96} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{18} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ (obrázek viz níže, je to kosočtverec bez hranice). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \operatorname{sgn} x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}$ pokud $[x,y] \in D_f$ a $x \neq 0$ (tj. vynechá se příslušná část osy y). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \operatorname{sgn} y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}$ pokud $[x,y] \in D_f$ a $y \neq 0$ (tj. vynechá se příslušná část osy x).

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-3,3)$ neexistuje.



Příklad 3: $f'(\pi) = \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}$, $f''(\pi) = \frac{e^\pi - e^\pi \cdot \left(\frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}\right)^2 - \left(1 - \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}\right)^2}{e^\pi + \frac{3}{2}} = \frac{24(2e^{2\pi} - 3}{(2e^\pi + 3^3}$.
Rovnice tečny: $y = \pi + \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3} \cdot (x - \pi)$.

Příklad 4: f není na M shora omezená (například body $[n+2, 0, n] \in M$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(n+2,0,n) \to +\infty$), supremum ani maximum tedy neexistuje. Minimum je $\frac{10}{3}$ v bodech $[-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}]$ a $[\frac{5}{3}, 0, -\frac{1}{3}]$. Že jde opravdu o minimum plyne například z toho, že množina $\{[x,y,z] \in M \colon f(x,y,z) \leq C\}$ je kompaktní pro každé $C > 0$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. Řada absolutních hodnot lze srovnat s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$.