

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^4 + \sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4} \right) \left([\sqrt[3]{n+1}] + [2\sqrt[3]{n-1}] + \dots + [n\sqrt[3]{n + (-1)^{n+1}}] \right), \quad (12 \text{ bodů})$$

kde [...] znamená celou část

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{\log \cos x} \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \left(\operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt[3]{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} x \right) - \frac{1}{2}}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x + \frac{3}{\sqrt{2}}}. \quad (17 \text{ bodů})$$

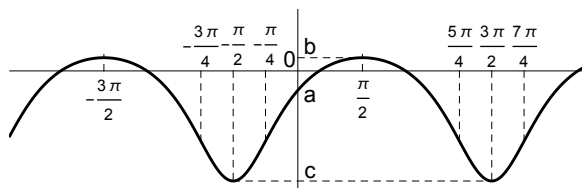
Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2019-2020

Příklad 1: $\frac{1}{6}$ (lze použít větu o policaitech)

Příklad 2: $\frac{7}{6}$

Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na \mathbb{R} . $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \sqrt[3]{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} x \right) - 1} + \left(\operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} x \right)}{\sqrt[3]{\left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} x \right) - \frac{1}{2} \right)^2}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$; $f'(2k+1) = +\infty$ pro $k > 0$ liché a $k < 0$ sudé, $f'(2k+1) = -\infty$ pro $k > 0$ sudé a $k < 0$ liché, $f'(1) = 0$.

Příklad 4: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na \mathbb{R} , f je 2π -periodická, lichá ani sudá není (nevypadá tak, že taková skutečně není, plyne z vlastností uvedených níže). Zkoumáme tedy na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ (na tomto intervalu uvádíme příslušné vlastnosti funkce, vlastnosti na \mathbb{R} se pak získají z periodicity). $f(0) = f(2\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$. f je rostoucí na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, klesající na $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$, rostoucí na $\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle$. V bodě $\frac{\pi}{2}$ je maximum (globální), v bodě $\frac{3}{2}\pi$ je minimum (globální). $H_f = \langle f(\frac{3}{2}\pi), f(\frac{\pi}{2}) \rangle = \langle -\frac{3\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{2})}, \frac{\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})} \rangle$. f je konvexní na $(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, konkávní na $(0, \frac{5}{4}\pi)$ a na $(\frac{7}{4}\pi, 2\pi)$. Inflexní body jsou $\frac{5}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. f nemá asymptoty.
Graf:



$$a = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$b = \frac{\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})}$$
$$c = -\frac{3\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{2})}$$