

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^4 + n^3}}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n}} \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - \cos^2 x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \max\{x, 1 - x^2, (x - 1)^2\}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|}. \quad (17 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2019-2020

Příklad 1: $\frac{1}{6}$
Příklad 2: \sqrt{e}

Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na \mathbb{R} . $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty), \\ -2x, & x \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}), \\ 1 & x \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}); \end{cases}$

$f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 1 - \sqrt{5}$, $f'_+(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 1$, $f'_-(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1$, $f'_+(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1 + \sqrt{5}$.

Příklad 4: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na \mathbb{R} , f je sudá, další údaje uvádíme na $\langle 0, +\infty \rangle$. $f(0) = \sqrt{2}$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Derivace existuje pro $x \neq \pm 1, \pm 2$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, $f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(2) = +\infty$. f je klesající na $\langle 0, 1 \rangle$, rostoucí na $\langle 1, \sqrt{\frac{5}{2}} \rangle$, klesající na $\langle \sqrt{\frac{5}{2}}, 2 \rangle$ a rostoucí na $\langle 2, +\infty \rangle$. V bodech 1 a 2 jsou minima (globální, hodnota 0, v bodech 0 a $\sqrt{\frac{5}{2}}$ jsou lokální maxima ($f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$). Obor hodnot je $\langle 0, +\infty \rangle$. f je ryze konkávní na intervalech $\langle 0, 1 \rangle$ (ze sudosti na $\langle -1, 1 \rangle$), $\langle 1, 2 \rangle$ a $\langle 2, +\infty \rangle$. Inflexní body nemá. Asymptota v $+\infty$ je $y = x$.

Graf:

