Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2017-2018

Příklad 1: Pro funkci
$$f(z) = \mathrm{tg}(z^2) \cdot \sin^2 2z$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/4}}{(x^2+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{4\cos x + 8\sin x + 9}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2017-2018
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}, \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}; k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Kořeny jsou v bodech: 0 (násobnosti 4), $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ (násobnosti 2) a $\pm\sqrt{k\pi}$, $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbf{N}$ (násobnosti 1).

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Funkci zapíšeme ve tvaru $f(z) = \frac{\sin(z^2)\cdot\sin^2(2z)}{\cos(z^2)}$. Čitatel i jmenovatel jsou pak celé funkce.
2) Jmenovatel má kořeny v bodech $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ a $\pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$, kde $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, všechny násobnosti 1. Násobnost ověříme například derivováním. [3 body].
3) Čitatel je součinem dvou funkcí, vyšetříme každou zvlášť:
(i) Funkce $\sin^2(2z)$ má kořeny v bodech $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, všechny násobnosti 2 (kořeny funkce $\sin 2z$ jsou násobnosti 1, například protože derivace je v těchto bodech nenulová; druhou mocninou se násobnosti zdvojnásobí). [2 body]
(ii) Funkce $\sin(z^2)$ má kořen 0 násobnosti 2 (je vidět z tvaru mocninné řady) [1 bod] a kořeny $\pm\sqrt{k\pi}$ a $\pm i\sqrt{k\pi}$ pro $k \in \mathbf{N}$, všechny násobnosti 1 (lze dokázat pomocí derivování). [2 body]
(iii) 0 je společný kořen obou činitelů, je tedy kořenem čitatele násobnosti 4, jiné společné kořeny oba činitelé nemají, takže další kořeny čitatele jsou sjednocením nenulových kořenů z bodů (i) a (ii). [1 bod]
4) Protože čitatel a jmenovatel nemají společný kořen, kombinací předchozího dostaneme výsledek. [1 bod]

Příklad 2: Výsledek: $\frac{\pi}{20}(-2\sqrt{2}\cdot 3^{3/4} + 2\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje absolutně: Integrovaná funkce je spojitá na $[0, +\infty)$, u $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{7y/4}}{(e^{2y}+1)(e^y+3)}\,\mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty: (1 bod)
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 2z \in \mathrm{Log}(-1) \text{ nebo } z \in \mathrm{Log}(-3)\} = \mathbb{C} \setminus (\{\ln 3 + \pi i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2}i + k\pi i : k \in \mathbb{Z}\})$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 3$ jsou z nich „uvnitř křivky“ právě body $z_1 = \ln 3 + \pi i$, $z_2 = \frac{\pi}{2}i$ a $z_3 = \frac{3}{2}\pi i$. (Tj. v těchto třech je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $\frac{3^{3/4}}{10}e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{3^{3/4}}{10\sqrt{2}}(-1+i)$, reziduum v bodě z_2 je $-\frac{1+3i}{20}e^{\frac{3}{8}\pi i} = \frac{3-i}{20}e^{-\frac{\pi}{8}i}$, reziduum v bodě z_3 je $\frac{-1+3i}{20}e^{\frac{9}{8}\pi i} = \frac{1-3i}{20}e^{\frac{\pi}{8}i}$. (6 bodů)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven

$$\frac{\pi}{10}(\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}(-1-i) + (1+3i)e^{-\frac{\pi}{8}i} + (3+i)e^{\frac{\pi}{8}i}). \qquad \text{(1 bod)}$$

4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ má limitu $-e^{\frac{3}{2}\pi i}I = iI$. (3 body)
5) Dostáváme tedy $I = \frac{\pi}{10(1+i)}(\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}(-1-i) + (1+3i)e^{-\frac{\pi}{8}i} + (3+i)e^{\frac{\pi}{8}i})$, odkud spočteme výsledek (usměrníme, roznásobíme čitatele a následně vyjádříme pomocí goniometrických funkcí). (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{13}{25}\pi$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy i na $[0, 2\pi]$.
2) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $-\frac{i}{4}\int_\varphi \frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2(2-4i)+9z+2+4i)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)
3) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 0, $-\frac{1}{2}(1+2i)$ a $-\frac{2}{5}(1+2i)$; přičemž v nule je pól násobnosti 2 a další dva póly jsou násobnosti 1. Bod $-\frac{1}{2}(1+2i)$ je mimo jednotkový kruh (index v něm je 0); body 0 a $-\frac{2}{5}(1+2i)$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (4 body)
4) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum v bodě 0 je $\frac{36-27i}{400}$. (4 body)
(ii) Reziduum v bodě $-\frac{2}{5}(1+2i)$ je $\frac{-36-77i}{400}$. (4 body)
5) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)