Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)

ZS 2017-2018

Příklad 1: Uvažme křivku

$$\varphi = \eta \dotplus [1, -3i] \dotplus [-3i, 2i] \dotplus \theta \dotplus [\tfrac{8}{3}\pi + \tfrac{i}{2}, -1 + \tfrac{i}{2}] \dotplus [-1 + \tfrac{i}{2}, -1 + i] \\ \dotplus [-1 + i, 2\pi + i] \dotplus [2\pi + i, 2\pi - 3i] \dotplus [2\pi - 3i, -1],$$

kde

$$\eta(t) = t + i(t^2 - 1),\ t \in [-1, 1] \qquad \text{a} \qquad \theta(t) = t + i(1 + \cos t),\ t \in [0, \tfrac{8}{3}\pi].$$

Načrtněte $\langle\varphi\rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.

(10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{3}}{x^3 + 3x^2 - 18x}\, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Najděte součet řady:

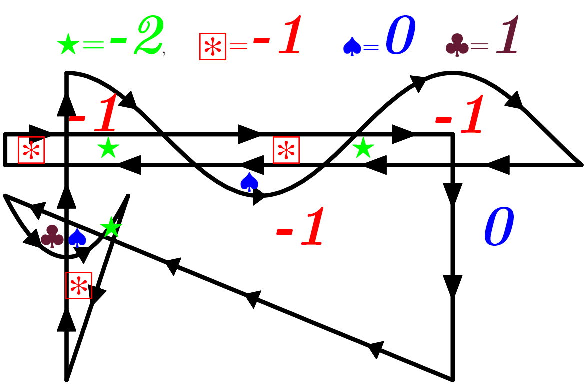
$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n(n^2+4)} \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)

ZS 2017-2018

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek:



Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Načrtneme $\langle\eta\rangle$, což je graf funkce $x \mapsto x^2 - 1$ na intervalu $[-1, 1]$, začíná v bodě -1 a končí v bodě 1.

(2 body)

2) Navážeme šikmou úsečkou spojující body 1 a $-3i$ (množinu $\langle\eta\rangle$ v dalším bodě neprotíná, protože její směrnice je 3, což je více než 2, což je směrnice tečny parabole z bodu 1 a kvadratická funkce je konvexní) a svislou úsečkou spojující body $-3i$ a $2i$. (1/2 bodu)

3) Doplníme $\langle\theta\rangle$, graf funkce $x \mapsto 1 + \cos x$ na intervalu $[0, \frac{8}{3}\pi]$, začíná v bodě $2i$ a končí v bodě $\frac{8}{3}\pi + \frac{i}{2}$.

(2 body)

4) Doplníme zbývajících pět úseček – vodorovnou spojující body $\frac{8}{3}\pi + \frac{i}{2}$ a $-1 + \frac{i}{2}$, navážeme svislou úsečkou do bodu $1 + i$, dále vodorovnou do bodu $2\pi + i$, svislou do bodu $2\pi - 3i$ a závěrečnou šikmou, která spojuje body $2\pi - 3i$ a -1, což je počáteční bod křivky, takže je křivka uzavřená. (1/2 bodu)

5) V obrázku vyznačíme orientaci křivky a určíme index – v neomezené komponentě je roven nule (1 bod), v ostatních komponentách ho určíme dle „propichovací věty“ (4 body).

Příklad 2: Výsledek: $-\frac{2}{27}\pi$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbf{R} \setminus \{-6, 0, 3\}$, v bodech -6, 0 a 3 má vlastní limitu, v okolí $\pm\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)

2) Položme $g(z) = \frac{e^{i\pi z/3}}{z^3+3z^2-18z}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-6, 0, 3\}$. Všechny tři póly jsou násobnosti 1. (2 body)

3) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R, -6-r] \dotplus (\dot{-}\, \eta_r) \dotplus [-6+r, -r] \dotplus (\dot{-}\, \psi_r) \dotplus [r, 3-r] \dotplus (\dot{-}\, \theta_r) \dotplus [6+r, R]$, kde $R > 7$, $r \in (0,1)$, $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\eta_r(t) = -6 + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\theta_r(t) = 3 + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. (2 body)

4) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 2) není „uvnitř“ žádný (ve všech je index 0). Integrál je tedy roven 0. (2 body)

5) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$:

(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R \to \infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)

(ii) $\lim_{r\to 0+} \int_{\eta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{-6} g$ podle jistého lemmatu (g má v -6 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{1}{54}$, limita je tedy $\frac{\pi}{54}i$. (2 body)

(iii) $\lim_{r\to 0+} \int_{\psi_r} g = \pi i \operatorname{res}_0 g$ podle téhož lemmatu (g má v -6 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{18}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{18}i$. (2 body)

(iv) $\lim_{r\to 0+} \int_{\theta_r} g = \pi i \operatorname{res}_3 g$ podle téhož lemmatu (g má v 3 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{27}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{27}i$. (2 body)

(v) Imaginární část integrálu přes čtyři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{x^3+6x^2-18x}\,\mathrm{d}x$. (2 body)

6) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}} - \frac{1}{4}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Všechny členy řady jsou definované (nedefinovaný člen pro $n = 0$ je podle zadání vyloučen), řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. (1 bod)

2) Označme $f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+4)}$, $g(z) = f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$ a $\varphi_n(t) = (n + \frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. (2 body)

3) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{-2i, 2i\})$. V bodech množiny $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ má g nejvýše pól násobnosti 1 (v bodě -1 má odstranitelnou singularitu, což další výpočet neovlivní), v bodech $\pm 2i$ má rovněž pól násobnosti 1, v bodě 0 má pól násobnosti 2. (2 body)

4) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum g v bodě $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je $\frac{(-1)^k(k+1)}{k(k^2+4)}$. (2 body)

(ii) Reziduum g v bodě $2i$ je $-\pi\frac{2-i}{4(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}$. (2 body)

(iii) Reziduum g v bodě $-2i$ je $-\pi\frac{2+i}{4(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}$. (1 bod)

(iv) Reziduum g v bodě 0 je $\frac{1}{4}$. Spočte se jako limita derivace funkce $\frac{\pi z(z+1)}{(z^2+4)\sin \pi z}$ v bodě 0. (5 bodů)

5) Pro $n \geq 2$ podle reziduové věty platí

$$\int_{\varphi_n} g = 2\pi i \left(\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{(-1)^k(k+1)}{k(k^2+4)} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \right). \qquad \text{(2 body)}$$

6) Protože $\lim_{n\to\infty} \int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (3 body)