# Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
## ZS 2017-2018

**Příklad 1:** Pro funkci

$$f(z) = \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{\sin \frac{2}{z}}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity (včetně chování v $\infty$). Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

**Příklad 2:** Najděte součet řady:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(4n^2+1)(2n+3)(2n-1)} \qquad (20 \text{ bodů})$$

**Příklad 3:** Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x + 2 \sin x - 3} \, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

---

# Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
## ZS 2017-2018
## Výsledky a návod k řešení

**Příklad 1:** $f$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{\frac{2}{k\pi}; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\})$. V bodech $\frac{2}{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ má $f$ odstranitelnou singularitu, po dodefinování limitou tam je kořen násobnosti 1. V bodech $\frac{2}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k$ má po dělení 4 jiný zbytek než 1, má $f$ póly násobnosti 1. Další kořeny $f$ nemá. V $\infty$ má $f$ pól násobnosti 1. (Bod 0 není izolovaná singularita.)

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel i jmenovatel jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (1 bod)
2) Kořeny jmenovatele jsou $\frac{2}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, všechny jsou násobnosti 1. Násobnost lze určit například derivováním. (2 body)
3) Kořeny čitatele jsou $\frac{2}{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, všechny jsou násobnosti 2. Násobnost lze určit například derivováním. (2 body)
4) $f$ je tedy holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{\frac{2}{k\pi}; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\})$ – tam, kde čitatel i jmenovatel jsou holomorfní a jmenovatel nenulový. 0 není izolovaná singularita, $f$ není holomorfní na žádném prstencovém okolí 0. Izolované singularity v $\mathbb{C}$ jsou tedy ostatní vyloučené body. $\infty$ je izolovaná singularita, protože $f$ je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C}; |z| > \frac{2}{\pi}\}$, což je prstencové okolí $\infty$. (1 bod)
5) Kombinací výsledků 2) a 3) určíme povahu izolovaných singularit v $\mathbb{C}$. (V bodech $\frac{2}{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, má čitatel kořen násobnosti 2 a jmenovatel kořen násobnosti 1, v ostatních bodech má jmenovatel kořen násobnosti 1 a čitatel je nenulový.) (2 body)
6) To, že v $\infty$ je pól násobnosti 1 zjistíme vyšetřením funkce $f(\frac{1}{z})$ v okolí 0. (2 body)

**Příklad 2:** Výsledek: $-\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{40 \sinh \frac{\pi}{2}}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. (1 bod)

2) Označme $f(z) = \frac{z}{(4z^2+1)(2z+3)(2z-1)}$, $g(z) = f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$ a $\varphi_n(t) = (n + \frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. (2 body)

3) Funkce $g$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\})$. Ve všech vyloučených bodech má nejvýše pól násobnosti 1 (přesněji – v bodě 0 má odstranitelnou singularitu, v ostatních bodech má pól násobnosti 1, toto rozlišení však v dalším výpočtu nehraje roli). (2 body)

4) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum $g$ v bodě $k \in \mathbb{Z}$ je $\frac{(-1)^k k}{(4k^2+1)(2k+3)(2k-1)}$. (2 body)

(ii) Reziduum $g$ v bodě $\frac{1}{2}$ je $\frac{\pi}{32}$. (2 body)

(iii) Reziduum $g$ v bodě $-\frac{3}{2}$ je $\frac{3\pi}{160}$. (2 body)

(iv) Reziduum $g$ v bodě $\frac{i}{2}$ je $-\frac{\pi(1-2i)}{80 \sinh \frac{\pi}{2}}$. (2 body)

(v) Reziduum $g$ v bodě $-\frac{i}{2}$ je $-\frac{\pi(1+2i)}{80 \sinh \frac{\pi}{2}}$. (2body)

5) Pro $n \geq 2$ podle reziduové věty platí

$$\int_{\varphi_n} g = 2\pi i \left(\frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{40 \sinh \frac{\pi}{2}} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k k}{(4k^2+1)(2k+3)(2k-1)}\right). \qquad (2 \text{ body})$$

6) Protože $\lim_{n\to\infty} \int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (3 body)

**Příklad 3:** Výsledek: $-\frac{2\pi}{25}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy i na $[0, 2\pi]$.

2) Nechť $\varphi$ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $-\frac{i}{2} \int_{\varphi} \frac{z^4-1}{z^2(z^2(2+i)-6iz-2+i)} \, dz$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)

3) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech $0$, $1+2i$ a $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; přičemž v nule je pól násobnosti 2 a další dva póly jsou násobnosti 1. Bod $1+2i$ je mimo jednotkový kruh (index v něm je 0); body 0 a $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (4 body)

4) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum v bodě 0 je $\frac{24-18i}{25}$. (4 body)

(ii) Reziduum v bodě $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ je $\frac{-26+18i}{25}$. (4 body)

5) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)