Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2017-2018

Příklad 1: Pro funkci

$$f(z) = \frac{\sin(e^z)}{\cos(e^z) - 1}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^\pi \frac{1}{(13 - 5\cos x)(5 - 4\cos x)}\,\mathrm{d}x$$ (20 bodů)

Příklad 3: Najděte součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 6n^2 + 9}$$ (20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2017-2018
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\ln(2k\pi) + il\pi; k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}\}$. Ve všech vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Kořeny jsou v bodech $\ln((2k-1)\pi) + il\pi$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $l \in \mathbb{Z}$, všechny násobnosti 1.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel i jmenovatel jsou celé funkce.
2) Jmenovatel je roven 0 v bodě $z \in \mathbb{C}$, právě když $e^z = 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Pro $k = 0$ takové z neexistuje. Pro $k > 0$ dostáváme $z = \ln(2k\pi) + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$. Pro $k < 0$ dostáváme $z = ln(-2k\pi) + i\pi + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$. (2 body)
3) Kořeny jmenovatele nalezené v bodě 2) lze najednou zapsat ve tvaru $\ln(2k\pi) + il\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$.
4) Všechny kořeny jmenovatele mají násobnost 2. (To lze zjistit například derivováním – první derivace jmenovatele je v uvedených bodech nulová, druhá již nikoli.) (2 body)
5) Čitatel je roven 0 v bodě $z \in \mathbb{C}$, právě když $e^z = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Pro $k = 0$ takové z neexistuje. Pro $k > 0$ dostáváme $z = \ln(k\pi) + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$. Pro $k < 0$ dostáváme $z = \ln(-k\pi) + i\pi + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$. (2 body)
6) Kořeny čitatele nalezené v bodě 5) lze najednou zapsat ve tvaru $\ln(k\pi) + il\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$.
7) Všechny kořeny čitatele mají násobnost 1. (To lze zjistit například derivováním – první derivace čitatele je v uvedených bodech nenulová.) (1 bod)
8) Kombinací předchozího dostaneme výsledek. (V bodech $\ln(2k\pi)+il\pi$ má čitatel kořen násobnosti 1 a jmenovatel kořen násobnosti 2, dostáváme tedy pól násobnosti 1. V bodech $\ln((2k-1)\pi) + il\pi$ má čitatel kořen násobnosti 1 a jmenovatel je nenulový.) (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{11\pi}{324}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje, neboť integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy i na $[0, \pi]$. Navíc je integrovaná funkce sudá, a proto je integrál roven polovině integrálu přes interval $[-\pi, \pi]$. (1 bod)
2) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál přes $[-\pi, \pi]$ (tj. polovina integrálu ze zadání) je roven $\int_\varphi \frac{-2iz}{(5z^2-26z+5)(2z^2-5z+2)} \, dz$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (4 body)
3) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 5, $\frac{1}{5}$, 2, $\frac{1}{2}$; všechny násobnosti 1. Přičemž body 5 a 2 jsou mimo jednotkový kruh (index je v nich 0) a body $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{2}$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (4 body)
4) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum v bodě $\frac{1}{5}$ je $\frac{5}{324}i$. (4 body)
(ii) Reziduum v bodě $\frac{1}{2}$ je $-\frac{4}{81}i$. (4 body)
5) Aplikací reziduové věty (a bodu 1) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi^2}{12\sinh^2 \pi\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36} \operatorname{cotgh} \pi\sqrt{3} - \frac{1}{18}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. Navíc jsou členy řady sudé (po dosazení $-n$ za n dostaneme stejnou hodnotu), a tedy zřejmě $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4+6n^2+9} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{n^4+6n^2+9} - \frac{1}{9}\right)$. Počítejme tedy součet řady od $-\infty$ do ∞. (2 body)
2) Označme $f(z) = \frac{1}{z^4+6z^2+9}$, $g(z) = f(z) \cdot \pi \operatorname{cotg} \pi z$ a $\varphi_n(t) = (n + \frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. (2 body)
3) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\})$. Ve bodech množiny $\mathbb{Z}$ má g pól násobnosti 1, v bodech $\pm i\sqrt{3}$ má pól násobnosti 2. (2 body)
4) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum g v bodě $k \in \mathbb{Z}$ je $\frac{1}{k^4+6k^2+9}$. (2 body)
(ii) Reziduum g v bodě $i\sqrt{3}$ je $-\frac{\pi^2}{12\sinh^2 \pi\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt{3}}{36} \operatorname{cotgh} \pi\sqrt{3}$. Spočteme ho jako hodnotu derivace funkce $\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{(z+i\sqrt{3})^2}$ v bodě $i\sqrt{3}$. (5 bodů)
(iii) Reziduum g v bodě $-i\sqrt{3}$ je stejné jako v bodě $i\sqrt{3}$, protože g je lichá funkce (použitá implikace plyne z faktu, že reziduum je příslušný koeficient v Laurentově rozvoji). Nebo ho lze počítat podobně jako v bodě $i\sqrt{3}$, tedy jako hodnotu derivace funkce $\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{(z-i\sqrt{3})^2}$ v bodě $-i\sqrt{3}$. (2 body)
5) Pro $n \geq 2$ podle reziduové věty platí $\int_{\varphi_n} g = 2\pi i(\sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^4+6k^2+9} + 2 \operatorname{res}_{i\sqrt{3}} g)$. (2 body)
6) Protože $\lim_{n\to\infty} \int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (3 body)