Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (A)

ZS 2015-2016

Příklad 1: Nechť X je prostor $c_0 \times \ell^2$ opatřený normou

$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_2, \quad \mathbf{x} \in c_0, \mathbf{y} \in \ell_2.$$

Definujme funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ předpisem

$$\varphi_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad \varphi_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \quad \text{a} \quad \varphi_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varphi_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

pro $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ a $\mathbf{y} = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$. Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X^*$, spočtěte jejich normy a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoli. (17 bodů)

Příklad 2: Nechť $X = \ell^1(\mathbb{Z})$. Definujme $T : X \to X$ předpisem

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \left(\left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right) x_n + \frac{1}{n^2+1} x_{-n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X.$$

(i) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(ii) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ s využitím standardní reprezentace duálů.
(iii) Rozhodněte, zda T je kompaktní nebo je tvaru $\lambda I - K$ pro $K \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pokud nastává poslední případ, určete λ.
(iv) Určete $\sigma_p(T)$, $\sigma_p(T')$, $\sigma(T)$, $\sigma(T')$.

(18 bodů)

Příklad 3: Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) [2 body] Ukažte, že vzorec

$$\Lambda_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_n(x)\, \mathrm{d}x$$

definuje temperovanou distribuci na $\mathbb{R}$.
(ii) [4 body] Ukažte, že posloupnost temperovaných distribucí (Λ_n) konverguje k jisté temperované distribuci, označme ji Λ.
(iii) [4 body] Spočtěte $\widehat{\Lambda}$, tj. Fourierovu transformaci temperované distribuce Λ, a určete nosič $\widehat{\Lambda}$.
(iv) [5 bodů] Nechť U je regulární distribuce na $\mathbb{R}$ určená funkcí $\chi_{[0,2\pi]}$, tj. distribuce na $\mathbb{R}$ daná vzorcem

$$U(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi.$$

Spočtěte konvoluci $U * \Lambda$.

Návod (a připomenutí tvrzení, co se mohou hodit):

(a) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R})$ pro nějaké $p \in [1,\infty]$, pak regulární distribuce určená f je temperovaná.
(b) Pro temperované distribuce platí Banach-Steinhausova věta.
(c) Ukažte, že pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ je řada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ absolutně konvergentní.
(d) Připomeňte si, že Fourierova transformace zobrazuje $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, a vyjádřete Λ_n pomocí Fourierovy transformace.
(e) Vyjádřete Λ pomocí Fourierovy transformace a použijte definici Fourierovy transformace pro temperované distribuce.
(f) S použitím definic, Fubiniovy věty a vlastností Fourierovy transformace spočtěte, že $U * \Lambda$ je regulární distribuce určená jistou konstantní funkcí.

(K řešení úlohy (ii) se hodí (b)–(d).)

Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (A)

ZS 2015-2016

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledky: $\|\varphi_1\| = 1$, nenabývá se. $\|\varphi_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nabývá se v bodě $(\mathbf{0}, (\frac{\sqrt{3}}{2^n})_{n=1}^{\infty})$. $\|\varphi_3\| = 1$, nenabývá se.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Linearita všech tří funkcionálů je zřejmá, pokud jsou dobře definovány. (Tj. pokud příslušné řady konvergují, plyne z věty o aritmetice limit.) [1 bod]
2) $|\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|_\infty \le \|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_1\| \le 1$. [1 bod]
3) Nechť $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = ((\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}, 0, 0, \dots), \mathbf{0})$. Pak $\|(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)\| = 1$ a $\varphi_1(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) \to 1$. Tedy $\|\varphi_1\| = 1$. [2 body]
4) Pokud $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = 1$ a $\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, pak by ve všech nerovnostech ve výpočtu z bodu 2) musela nastávat rovnost. Analýzou jednotlivých nerovností dostaneme, že pak nutně $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ a posloupnost $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní a má normu 1. To je spor s tím, že $\mathbf{x} \in c_0$. Tedy φ_1 normy nenabývá. [3 body]
5) Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme $|\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \frac{1}{\sqrt{3}}\|\mathbf{y}\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{3}}\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_2\| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. [2 body]
6) Norma se nabývá v bodě uvedeném ve výsledcích. Nalezneme ho díky tomu, že víme, kdy v Cauchy-Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. [2 body]
7) Kombinací 2) a 5) vidíme, že $|\varphi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|_\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\|\mathbf{y}\|_2 \le \|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_3\| \le 1$. [2 body]
8) O tom, že $\|\varphi_3\| = 1$, svědčí posloupnost bodů z bodu 3). [2 body]
9) Pokud $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = 1$ a $\varphi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, pak by ve všech nerovnostech ve výpočtu z bodu 7) musela nastávat rovnost. Odtud vidíme, že nutně $\mathbf{y} = 0$, a tedy $\varphi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Proto by funkcionál φ_1 nabýval normy. To však není pravda dle bodu 4), tedy ani φ_3 své normy nenabývá. [2 body]

Příklad 2: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Pro $\mathbf{x} \in X$ platí $\|T(\mathbf{x})\|_1 \le 2\|\mathbf{x}\|_1$, což se ověří snadným výpočtem. Protože linearita T je zřejmá, vidíme, že $T \in L(X)$ a $\|T\| \le 2$. [1 bod]
(ii) Protože $T(\mathbf{e}_n) = (1 - \frac{1}{n^2+1})\mathbf{e}_n + \frac{1}{n^2+1}\mathbf{e}_{-n}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, z výpočtu $T'(\mathbf{x})(n) = \mathbf{x}(T\mathbf{e}_n) = (1 - \frac{1}{n^2+1})x_n + \frac{1}{n^2+1}x_{-n}$ plyne, že $T' \in L(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ je dán týmž vzorcem jako T. [3 body]
(iii) T není kompaktní, je však $T = I - K$, kde K je kompaktní. Jest $K(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{n^2+1}(x_n - x_{-n})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ pro $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$. K je kompaktní, protože je limitou konečnědimenzionálních operátorů K_N definovaných vzorcem
$K_N(\mathbf{x})(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2+1}(x_n - x_{-n}), & |n| \le N, \\ 0, & |n| > N. \end{cases}$ Je totiž $\|K - K_N\| \le \frac{2}{(N+1)^2} \to 0$. Že T není kompaktní plyne z toho, že $I = T + K$ není kompaktní a K je kompaktní, nebo to lze dokázat z výpočtu $\|T\mathbf{e}_n - T\mathbf{e}_m\| = 2$ pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n \ne m$. [4 body]
(iv-1) $\sigma_p(K) = \sigma_p(K') = \{0\} \cup \{\frac{2}{n^2+1}; n \in \mathbb{N}\}$. To se zjistí řešením příslušných rovnic a rozborem možností. Vlastní vektor k $\frac{2}{n^2+1}$ je například $\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{-n}$ (pro $n \in \mathbb{N}$). Vlastní vektor příslušný k 0 je například $\mathbf{e}_0$, nebo také $\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{-n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. [4 body]
(iv-2) Protože K je kompaktní, je $\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\} = \sigma_p(K)$. Navíc $\sigma(K') = \sigma(K)$. [2 body]
(iv-3) Protože $T = I - K$, je $\sigma(T) = 1 - \sigma(K)$ a $\sigma_p(T) = 1 - \sigma_p(K)$. Tedy $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{1\} \cup \{1 - \frac{2}{n^2+1}; n \in \mathbb{N}\}$. [2 body]
(iv-4) Protože $T' = I - K'$, je $\sigma(T') = 1 - \sigma(K')$ a $\sigma_p(T') = 1 - \sigma_p(K')$. Tedy $\sigma(T') = \sigma_p(T') = \{1\} \cup \{1 - \frac{2}{n^2+1}; n \in \mathbb{N}\}$. [2 body]

Příklad 3: Výsledky a postup řešení:

(i) f_n je omezená spojitá funkce na $\mathbb{R}$, patří tedy do $L^\infty(\mathbb{R})$. Proto je Λ_n temperovaná distribuce (dle tvrzení z bodu (a), které je obsahem Tvrzení IV.38(b) z přednášky).

(ii-1) Snadným výpočtem z definice Fourierovy transformace vidíme, že $\Lambda_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\widehat{\varphi}(-k)$. K důkazu, že posloupnost (Λ_n) konverguje k temperované distribuci Λ, stačí ukázat, že pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\widehat{\varphi}(-k)$ (díky Banach-Steinhausově větě pro temperované distribuce zmíněné v bodě (b), viz též Věta IV.40 z přednášky).

(ii-2) Je-li $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pak podle definice Schwartzova prostoru je funkce $x \mapsto (1+x^2)\varphi(x)$ omezená na $\mathbb{R}$. Tedy existuje $C > 0$, že $|\varphi(x)| \le \frac{C}{1+x^2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Speciálně pro $k \in \mathbb{Z}$ je $|\varphi(k)| \le \frac{C}{1+k^2}$, tedy $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi(k)| < \infty$.

(ii-3) Je-li $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pak i $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, tedy dle bodu (ii-2) jest $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(k)| < \infty$. Kombinací s bodem (ii-1) dostaneme $\Lambda(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\widehat{\varphi}(-k)$, přičemž tato řada konverguje absolutně. To dokazuje existenci Λ z bodu (ii) a zároveň dává vzorec pro tuto distribuci.

(iii) Jest $\widehat{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\widehat{\varphi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\widehat{\widehat{\varphi}}(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\check{\varphi}(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\varphi(k)$. Odtud je patrné, že nosič $\widehat{\Lambda}$ je roven $\mathbb{Z}$. (Pokud $\operatorname{spt}\varphi \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, zřejmě $\widehat{\Lambda}(\varphi) = 0$. Navíc, pro každé $n \in \mathbb{Z}$ existuje $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $\varphi(n) = 1$ a $\operatorname{spt}\varphi \subset U(n, \frac{1}{2})$.)

(iv-1) Protože U má kompaktní nosič, je konvoluce definována a platí $U * \Lambda(\varphi) = \Lambda(\check{U} * \varphi)$.

(iv-2) Z definic plyne, že $\check{U} * \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\varphi(x+y)\,\mathrm{d}y$.

(iv-3) S využitím definic, Fubiniovy věty a základních vlastností Fourierovy transformace spočteme, že $\widehat{\check{U} * \varphi}(-k) = \begin{cases} 0 & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ \sqrt{2\pi}\widehat{\varphi}(0) & k = 0. \end{cases}$

(iv-4) Kombinací předchozího dostaneme $U * \Lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{R}}\varphi$.