Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)

ZS 2013-2014

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{\cos z}{z + \pi}$$

v maximálních možných mezikružích o středu 0. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 3x - 10} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x^3 + 8)} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)

ZS 2013-2014

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Na $U(0,\pi)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k)! \cdot \pi^{n-2k+1}} \right) z^n$; na $P(0,\pi,+\infty)$ je
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\max\{0, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil\}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1} \pi^{2k-n-1}}{(2k)!} \right) z^n.$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) f je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus \{-\pi\}$, tedy na $U(0,\pi)$ lze vyjádřit mocninnou řadou, na $P(0,\pi,\infty)$ Laurentovou řadou. (1 bod)
2) $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ na $\mathbf{C}$. (1 bod)
3) $\frac{1}{z+\pi} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi^{m+1}} z^m, & z \in U(0,\pi) \text{ (1 bod)}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \pi^{m-1}}{z^m}, & z \in P(0,\pi,+\infty) \text{ (2 body)}. \end{cases}$
4) Výsledek dostaneme vynásobením příslušných řad. (5 bodů, z toho 2 body na $U(0,\pi)$ a 3 body na $P(0,\pi,+\infty)$).

Příklad 2: Výsledek: $-\frac{2}{7}\pi$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbf{R}\setminus\{-2,5\}$, v bodech -2 a 5 má vlastní limitu, v okolí $\pm\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
3) Položme $g(z)=\frac{e^{i\pi z}}{z^2-3z-10}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-2,5\}$. Oba póly jsou násobnosti 1. (3 body)
4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R}=\psi_R\dotplus[-R,-2-r]\dotplus(\dot-\,\eta_r)\dotplus[-2+r,5-r]\dotplus(\dot-\,\theta_r)\dotplus[5+r,R]$, kde $R>6$, $r\in(0,1)$, $\psi_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\eta_r(t)=-2+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\theta_r(t)=5+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. (2 body)
5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) není „uvnitř“ žádný (v obou je index 0). Integrál je tedy roven 0. (3 body)
6) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g\to 0$ pro $R\to\infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\eta_r} g=\pi i\operatorname{res}_{-2} g$ podle jistého lemmatu (g má v -2 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{7}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{7}i$. (3 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\theta_r} g=\pi i\operatorname{res}_{5} g$ podle téhož lemmatu (g má v 5 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{7}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{7}i$. (3 body)
(iii) Imaginární část integrálu přes tři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{x^2-3x-10}\,\mathrm{d}x$. (2 body)
7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x=e^y$ převedeme na $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3y/4}}{e^{3y}+8}\,\mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (1 bod):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}: 3z\in\operatorname{Log}(-8)\}=\mathbb{C}\setminus\{\ln 2+i\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi i: k\in\mathbb{Z}\}$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R>\ln 2$ jsou z nich „uvnitř křivky“ právě body $z_1=\ln 2+i\frac{\pi}{3}$, $z_2=\ln 2+i\pi$ a $z_3=\ln 2+i\frac{5}{3}\pi$. (Tj. v těchto třech je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{\pi}{4}i}$, reziduum v bodě z_2 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{3}{4}\pi i}$, reziduum v bodě z_3 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{5}{4}\pi i}$. (5 bodů)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $-i\cdot\frac{\pi\sqrt[4]{8}}{12}e^{\frac{3}{4}\pi i}=\frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}(1+i)$. (4 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R,R]$ má limitu I, integrál přes $[R+2\pi i,-R+2\pi i]$ má limitu $-e^{\frac{3}{2}\pi i}I=iI$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $(1+i)I=\frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}(1+i)$, odkud spočteme výsledek. (2 body)