Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (A)

LS 2011-2012

Příklad 1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) - 27y(n) = 26n^2, \qquad n \in \mathbf{N}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

která splňují počáteční podmínku $y(-1) = \sqrt{3}$. (12 bodů)

Příklad 3: Uvažujme následující autonomní rovnici:

$$y' = \sqrt{e^{|y|} - 1} \cdot e^y \cdot (y - 1)$$

Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází alespoň jedno řešení definované na $\mathbf{R}$.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.

(12 bodů)

Příklad 4: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'(1 + x^2) + \frac{y}{\operatorname{arctg} x} = x^2(1 + x^2).$$

Která z nich mají vlastní jednostrannou limitu v bodě 0? (12 bodů)

Příklad 5: Najděte fundamentální systém řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (A)

LS 2011-2012

Příklad 1: $\{y(n)\} = \{-n^2 - \frac{3}{13}n - \frac{63}{169} + a \cdot 3^n + b \cdot 3^n \cos \frac{2n\pi}{3} + c \cdot 3^2 \sin \frac{2n\pi}{3}\}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Příklad 2: $y(x) = -x \operatorname{tg} \sqrt{2\log(-x) + \frac{\pi^2}{9}}$, $x \in (-e^{5\pi/72}, -e^{-\pi^2/18})$.

Příklad 3: (a) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty, 1)\}$
(b) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in \langle 1, +\infty)\}$
(c) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty, 1\rangle\}$
(d) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (1, +\infty)\}$

Příklad 4: $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{6 \operatorname{arctg} x} + \frac{\log(1+x^2)}{6 \operatorname{arctg} x} + \frac{c}{\operatorname{arctg} x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ ($c \in \mathbf{R}$). Vlastní jednostrannou limitu v bodě nula mají ta dvě z výše uvedených řešení, pro která platí $c = 0$.

Příklad 5: Fundamentální systém tvoří například čtveřice vektorových funkcí:
$[\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \sin \sqrt{3}x), -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \sin \sqrt{3}x), -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \sin \sqrt{3}x, e^{-x} \cos \sqrt{3}x]$,
$[-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \cos \sqrt{3}x, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \cos \sqrt{3}x, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x} \cos \sqrt{3}x, e^{-x} \sin \sqrt{3}x]$, $[2e^{2x}, e^{2x}, e^{2x}, 0]$, $[0, -e^{-2x}, e^{-2x}, 0]$.