

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n + \cos \frac{2}{n}}}{\sqrt[4]{n^2 + \sin \frac{3}{n}} - \sqrt{n}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočítejte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{\pi}{x \operatorname{arccotg}^2 x}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = \arccos(\min\{2x^2, x+1\})$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{8x}{x^2 - 25}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2010-2011

Příklad 1: $\frac{4}{3}$

Příklad 2: $\frac{1}{e^2}$

Příklad 3: $D_f = \langle -2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$, f je spojitá na D_f . Pro $x \in (-2, -\frac{1}{2})$ je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$, pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je $f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}$; $f'_+(-2) = -\infty$, $f'_-(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $f'_+(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $f'_-(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\infty$

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, f je lichá, stačí tedy vyšetřit na $\langle 0, 5 \rangle \cup (5, +\infty)$. $f(0) = 0$, limita v bodě 5 zleva je $-\frac{\pi}{2}$, limita v bodě 5 zprava je $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je 0. f je klesající na $\langle 0, 5 \rangle$ a na $(5, +\infty)$ (z lichosti plyne, že je klesající na $(-5, 5)$ i na $(-\infty, -5)$, lokální extrémů nemá, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. f je konkávní na $(0, \sqrt{5})$, konvexní na $(\sqrt{5}, 5)$, konvexní na $(5, +\infty)$; symetricky na záporné poloose; inflexní body jsou $-5, 0$ a 5 . Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = 0$.

Graf:

