Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2009-2010

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

v maximálních možných mezikružích o středu π. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x^2+25)}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2009-2010
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: Funkce f je holomorfní na $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, v bodě 0 je odstranitelná singularita, po dodefinování je holomorfní na $\mathbf{C}$, tedy na celém $\mathbf{C}$ je součtem mocninné řady o středu π. Tato řada je $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\frac{(-1)^{m-n}}{\pi^{m-2n}(2n+1)!}\right)(z-\pi)^k$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Dodefinujeme-li f v nule hodnotou 1, bude holomorfní na $\mathbf{C}$, a tedy je součtem mocninné řady o středu π na celém $\mathbf{C}$. (2 body)
2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ na $\mathbb{C}$ (lze využít toho, že $\sin z = -\sin(z-\pi)$). (1 bod)
3) $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^n}{\pi^{n+1}}$ na $U(\pi,\pi)$. (2 body)
4) Vynásobením příslušných řad dostaneme výsledek na $U(\pi,\pi)$. (2 body).
5) Z jednoznačnosti rozvoje v mocninnou řadu plyne, že výsledek je platný na celém $\mathbf{C}$. (3 body)

(*Poznámka:* Pokud neučiníme postřeh v bodě 1), počítáme na mezikružích $P(\pi,\pi) = P(\pi,0,\pi)$ a $P(\pi,\pi,+\infty)$. Na $P(\pi,\pi)$ spočteme pomocí bodů 2), 3) a 4) (celkem 5 bodů). Na $P(\pi,\pi,+\infty)$ spočteme, že $\frac{1}{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^n}{(z-\pi)^{n+1}}$ (2 body) a pak vynásobíme s řadou z 2) (3 body). Vyjde $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\max\{0,[\frac{m+1}{2}]\}}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-m}\pi^{2n-m}}{(2n+1)!}\right)(z-\pi)^m$. Že jde o stejnou řadu jako výše plyne například z toho, že $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-m}\pi^{2n-m}}{(2n+1)!} = 0$ pro každé m (a to platí, protože $\sin\pi = 0$.))

Příklad 2: Výsledek: $\frac{3}{10}\pi$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $(0, +\infty)$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)
2) Označme integrovanou funkci f. f je sudá, a tedy integrál přes $(0, +\infty)$ je polovina integrálu přes $\mathbf{R}$. (1 bod).
3) Pro $R > 0$ nechť $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, a $\varphi_R = [-R, R] \dotplus \psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. (3 body)
3) f je racionální funkce s póly v bodech $2+i$, $2-i$, $-2+i$, $-2-i$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $2-i$ a $-2-i$ leží „vně křivky“, je v nich index nula, ve zbylých dvou je (pro $R > \sqrt{5}$) index 1. (4 body)
4) Reziduum v bodě $2+i$ je $\frac{1-3i}{20}$, reziduum v bodě $-2+i$ je $\frac{-1-3i}{20}$ (4 body)
5) Pro $R > \sqrt{5}$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R} = \frac{3}{5}\pi$. (4 body)
6) $\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} f = 0$, limita integrálu přes $[-R, R]$ je rovna dvojnásobku integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 5^{-5/4} \cdot \cos \frac{3}{8}\pi$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3y/4}}{e^{2y}+25}\, \mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (2 body):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathrm{Log}(5i) \cup \mathrm{Log}(-5i))$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 5$ jsou z nich „uvnitř křivky“ právě body $z_1 = \ln 5 + i\frac{\pi}{2}$ a $z_2 = \ln 5 + i\frac{3\pi}{2}$. (Tj. v těchto dvou je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-\frac{1}{2} \cdot 5^{-5/4} e^{\frac{3}{8}\pi i}$, reziduum v bodě z_2 je $-\frac{1}{2} \cdot 5^{-5/4} e^{\frac{9}{8}\pi i}$. (4 body)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $-i\pi \cdot 5^{-5/4}(e^{\frac{3}{8}\pi i} + e^{\frac{9}{8}\pi i})$. (3 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ má limitu $e^{\frac{3}{2}\pi i} I = -iI$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $(1 + i)I = -i\pi \cdot 5^{-5/4}(e^{\frac{3}{8}\pi i} + e^{\frac{9}{8}\pi i})$, odkud spočteme výsledek. (3 body)