Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2008-2009

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$. Existuje matice $\mathbb{A}^{-1}$? Pokud ano, spočtěte i její determinant.:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 28 & 6 & 28 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y}{x^2+y+5}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[0,-1,f(0,-1)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{(xy^2-1)} + \log\frac{x}{y} = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2z^2 \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 9, z - y^2 + 1 \geq 0\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

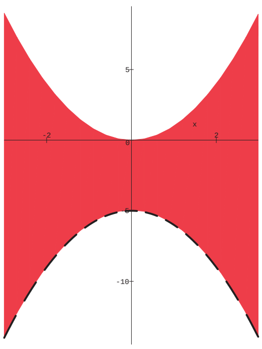
Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2008-2009

Příklad 1: $\det\mathbb{A} = 100$, $\mathbb{A}^{-1}$ existuje, protože $\det\mathbb{A} \neq 0$, a $\det\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{100}$.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] : -x^2-5 < y \leq x^2\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x(2y+5)}{(x^2+y+5)^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+y+5}{x^2-y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2+5}{(x^2+y+5)^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+y+5}{x^2-y}}$, obě parciální derivace v bodech splňujících $-x^2-5 < y < x^2$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $y = x^2$ má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, ta ovšem neexistuje. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = \frac{1}{2} - \frac{5}{16}(y+1)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -2$, $f''(1) = -12$, rovnice tečny je $y = 1 - 2(x-1)$.

Příklad 4: Maximum ani supremum neexistuje, f není na M shora omezená ($[3,0,n] \in M$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $f(3,0,n) \to +\infty$). Minimum $\frac{63}{8}$ v bodech $[\pm\frac{\sqrt{31}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}]$ (všechny čtyři možnosti znamének). Že to je skutečně minimum plyne z toho, že například $\{[x,y,z] \in M : f(x,y,z) \leq 10\}$ je kompaktní.

Příklad 5: Konverguje neabsolutně. Pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium, pro divergenci řady absolutních hodnot limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.