Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{z}$$

v maximálních možných mezikružích o středu 1. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 5x + 6}\,\mathrm{d}x$$

(20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(13 + 12\sin t)^2(5 + 4\sin t)}\,\mathrm{d}t$$

(20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek:

$$\frac{e^z}{z} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \right) (z-1)^k, & \text{na } U(1,1), \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e \cdot \sum_{j=\max\{0,k+1\}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-j+1}}{j!} \right) (z-1)^k, & \text{na } P(1,1,\infty). \end{cases}$$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) $e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ na $\mathbb{C}$ (1 bod)
2) $\frac{1}{z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n & \text{na } U(1,1) \quad \text{(2 body)}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^n} & \text{na } P(1,1,\infty) \quad \text{(2 body)} \end{cases}$
3) Vynásobením příslušných řad dostaneme výsledek. (2 body za $U(1,1)$, 3 body za $P(1,1,\infty)$)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{y/3} \cdot e^y}{e^{2y} + 5e^y + 6} \, \mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty: (2 body)
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{\ln 3 + i\pi + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\ln 2 + i\pi + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\})$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 3$ jsou z nich „uvnitř křivky“ právě body $\ln 3 + i\pi$ a $\ln 2 + i\pi$. (Tj. v těchto dvou je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě $\ln 2 + i\pi$ je $\sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, reziduum v bodě $\ln 3 + i\pi$ je $-\sqrt[3]{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$. (4 body)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $\pi(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{3} - i)$. (3 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ má limitu $-e^{2\pi i/3} I$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $I(1 - e^{2\pi i/3}) = \pi(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{3} - i)$, odkud spočteme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{67}{375}\pi$
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_{\varphi} \frac{-z^2}{(6z^2 + 13iz - 6)(2z^2 + 5iz - 2)} \, \mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)
2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly $-2i$, $-\frac{1}{2}i$ (oba násobnosti 1) a $-\frac{3}{2}i$, $-\frac{2}{3}i$ (oba násobnosti 2). Přičemž body $-2i$ a $-\frac{3}{2}i$ jsou mimo jednotkový kruh (index je v nich 0) a body $-\frac{1}{2}i$ a $-\frac{2}{3}i$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (5 bodů)
3) Reziduum v bodě $-\frac{1}{2}i$ je $-\frac{1}{12}i$. (2 body)
4) Reziduum v bodě $-\frac{2}{3}i$ je $-\frac{3}{500}i$. Vypočte se jako hodnota první derivace funkce $\frac{-z^2}{36(z+\frac{3}{2}i)^2(2z^2+5iz-2)}$ v bodě $-\frac{2}{3}i$. (5 bodů)
5) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)