

Písemka D z matematické analýzy MAI054

zimní semestr 2006 - 2007

Všechny postupy řádně zdůvodněte.

Příklad 1. Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \log^3 n \left(\sqrt[4]{\log(n+8)} - \sqrt[4]{\log n} \right)^4. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbf{R}$ konverguje resp. absolutně konverguje řada

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{n^2} \right)^n x^n. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3.

Spočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4. Určete ve kterých bodech $x \in \mathbf{R}$ je spojitá (případně jednostranně spojitá) funkce

$$f(x) = (1 + |x^2 - 9|)^{x+3} \quad (10 \text{ bodů})$$

a ve kterých bodech existují její oboustranné resp. jednostranné derivace a spočítejte je.

Příklad 5.

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemka D – výsledky:

Příklad 1: 16.

Příklad 2: Pro $x \in (-3, 3)$ konverguje absolutně, jinak diverguje. Lze použít odmocninové kritérium a nutnou podmínku konvergence.

Příklad 3: Limita neexistuje (zprava $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, zleva $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$).

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na \mathbf{R} .

$f'(x) = (1 + |x^2 - 9|)^{x+3} \left(\log(1 + |x^2 - 9|) + \frac{2x(x+3) \operatorname{sgn}(x^2-9)}{1+|x^2-9|} \right)$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$; $f'(-3) = 0$, $f'_-(3) = -36$, $f'_+(3) = 36$.

Příklad 5:

