

Písenná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (B)

ZS 2005-2006

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot (\sin^2 x + 1)} dx. \quad (16 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí \mathbb{A} , kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (11 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice \mathbb{B} a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -9 & 18 & 2 \\ -6 & 12 & 1 \\ -6 & 11 & 2 \end{pmatrix} \quad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos 2x - 4 \log \cos x}{\log(1 + x^4)} \quad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémů funkce f v množině M , kde

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{y-x}, \quad M = \mathbf{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}. \quad (11 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (B)

ZS 2005-2006

Příklad 1: $-\frac{1}{2} \log |\cos x| - \frac{1}{4} \log(2 - \cos^2 x)$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Substitucí $y = \cos x$ lze převést na racionální funkci. Lze použít i substituce $y = \sin x$.

Příklad 2: ID, 20.

Příklad 3: Vlastní číslo 1 násobnosti 2, vlastní vektory $t \cdot [2, 1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; vlastní číslo 3 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [\frac{5}{3}, 1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: -1

Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodě $[\frac{1}{e\sqrt{2}}, -\frac{1}{e\sqrt{2}}]$, ostré lokální minimum v bodě $[-\frac{1}{e\sqrt{2}}, \frac{1}{e\sqrt{2}}]$. (Sedlové body $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.)