Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (D)

ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin 2x}}{\arcsin 7x} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \arcsin(\sin(2\operatorname{arctg} x))$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Napište příklad posloupnosti $\{a_n\}$ takové, že pro všechna n platí $a_n < 7$ a přitom $\lim a_n \geq 7$.

(b) Je pravda, že pokud řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně, pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Napište příklad funkce spojité na intervalu $(0,1)$, která nemá limitu v bodě 1 zleva.

(d) Je pravda, že každá omezená podmnožina $\mathbf{R}$ má supremum? Pokud ne, uveďte příklad.

(e) Existuje funkce f taková, že $f'_+(1)$ neexistuje a přitom $\lim_{x\to 1+} f'(x) = 7$? Pokud ano, uveďte příklad.