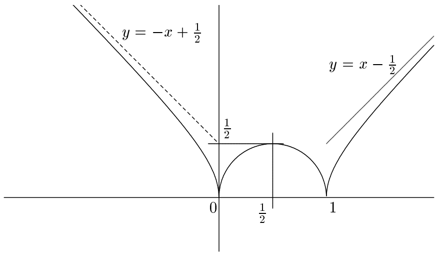
Výsledky písemky z Matematické analýzy I pro informatiky (D)
ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1: $\frac{3}{7}$

Příklad 2: Řada konverguje neabsolutně. Protože členy se sudými indexy jsou nulové, stačí zkoumat řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$. Ta konverguje dle Leibnizova kritéria. Řada absolutních hodnot diverguje podle limitního srovnávacího kritéria (lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Příklad 3: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & x \in (-1,1), \\ -\frac{2}{1+x^2} & x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty); \end{cases}$ $f'_+(1) = f'_-(-1) = -1$, $f'_-(1) = f'_+(-1) = 1$.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$. Limity v $\pm\infty$ jsou $+\infty$. Derivace neexistuje v bodech 0 a 1, $f'_-(0) = f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(0) = f'_+(1) = +\infty$. f je klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$, rostoucí na $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ a na $\langle 1, +\infty$, v bodech 0 a 1 je globální minimum, v bodě $\frac{1}{2}$ je lokální maximum, $H_f = \langle 0, +\infty)$. f ke konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, na $\langle 0, 1\rangle$ a na $\langle 1, +\infty)$. Asymptota v $+\infty$ je $y = x - \frac{1}{2}$, asymptota v $-\infty$ je $y = -x + \frac{1}{2}$.



Příklad 5: (a) Například $a_n = 7 - \frac{1}{n}$. (b) Ano. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně, pak $\lim b_n = 0$, a tedy od jistého n_0 platí $|b_n| < 1$, a tedy $|a_n b_n| < |a_n|$. Ze srovnávacího kritéria pak plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje absolutně. (c) Například $f(x) = \sin \frac{1}{x-1}$. (d) Ne, prázdná množina je omezená, nemá však supremum. (e) Například $f(x) = 7x$, $x \in (1, +\infty)$. Pak $f'_+(1)$ neexistuje, protože f není definovaná v bodě 1.