VIII.1 Riemannův integrál – zavedení

Definice. Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením** intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělícími body. Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \dots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b\rangle$ je **zjemněním dělení** D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x);\ x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x);\ x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle\};$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\}$$

(tzv. **horní Riemannův integrál** funkce f přes $\langle a, b\rangle$),

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\}$$

(tzv. **dolní Riemannův integrál** funkce f přes $\langle a, b\rangle$).

Řekneme, že funkce f má **Riemannův integrál přes** $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota tohoto integrálu je pak rovna $\overline{\int_a^b} f$. Značíme ji $\int_a^b f$ nebo též $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f = 0$.

Větička 1. *Nechť f je omezená funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

(1) *Jsou-li D_1 a D_2 dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existuje dělení D, které je zjemněním každého z nich.*

(2) *Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a D' zjemňuje D.Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D)$$

(3) *Jsou-li D_1, D_2 dvě dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2)$.*

(4) $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

Větička 2. *Nechť f je omezená funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.*

VIII.2 Riemannův integrál pro spojité funkce

Definice. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá** na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I, \; |x - y| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 3. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$. Pak je f stejnoměrně spojitá na $\langle a, b \rangle$.*

Věta 4. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$. Pak f má Riemannův integrál přes $\langle a, b \rangle$.*

Lemma 5. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$ a $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \int_a^b f.$$

Věta 6 (vlastnosti Riemannova integrálu). *Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

(i) *Je-li $c \in (a, b)$, pak*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(ii) *Nechť platí $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(iii) *Existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

(iv) *Nechť $c \in \langle a, b \rangle$. Označíme-li $F(x) = \displaystyle\int_c^x f$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$.*

Poznámka. Body (i) a (ii) předchozí věty platí i pro nespojité funkce, stačí předpokládat existenci příslušných Riemannových integrálů. Pak ovšem pro důkaz nelze využít Lemma 5 a je třeba použít definici Riemannova integrálu. Body (iii) a (iv) naproti tomu pro nespojité funkce neplatí.

Věta IV.23 ze zimního semestru (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji* log *a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* log *rostoucí,*
(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty) : \; \log xy = \log x + \log y$,
(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.