VI.5 Řešení soustav lineárních rovnic

Definice. Mějme soustavu rovnic

$$
\text{(S)} \qquad \begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots. & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots. & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots. & +a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}
$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a $x_1, \dots, x_n$ jsou neznámé. Označme

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots. & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots. & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ \text{a} \ (\mathbb{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots. & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

Matici $\mathbb{A}$ nazýváme **maticí soustavy** (S), vektor $\boldsymbol{b}$ **vektorem pravých stran** a matici $(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$ **rozšířenou maticí soustavy** (S).

Věta 15 (o soustavách s regulární maticí). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice $\mathbb{A}$ je regulární,*
(ii) *soustava* (S) *má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ právě jedno řešení,*
(iii) *soustava* (S) *má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ alespoň jedno řešení.*

Věta 16 (o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic). *Uvažujme soustavu* (S). *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *Soustava* (S) *má řešení.*
(2) *Matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.*
(3) *Vektor pravých stran lze vyjádřit jako lineární kombinací sloupců matice soustavy.*

Věta 17 (Cramerovo pravidlo). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární matice, $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ a $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pak*

$$
x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},
$$

pro $j = 1, \dots, n$.