V.2 Spojitost a limita funkcí více proměnných

Definice. **Funkcí** n **proměnných** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.

- Řekneme, že f je **spojitá v bodě** $\boldsymbol{x}$, jestliže platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$
- Nechť $A \in \mathbf{R}$ Řekneme, že funkce f **má v bodě** $\boldsymbol{x}$ **limitu** A (zapisujeme $\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{y}) = A$), jestliže platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\} \colon f(\boldsymbol{y}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka Funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, právě když $\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a f je funkce n proměnných.

(a) Nechť $\boldsymbol{x} \in M$.Řekneme, že f je **spojitá v bodě** $\boldsymbol{x}$ **vzhledem k** M, jestliže platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

(b) Řekneme, že f je **spojitá na** M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Věta 6 (Heine). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá na M,*

(ii) *pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ a každou posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ prvků M takovou, že $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$, platí $f(\boldsymbol{x}^j) \to f(\boldsymbol{x})$.*

Poznámka. Pro limity funkcí více proměnných platí analogie vět pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika limit, limita složené funkce). Navíc je funkce $\boldsymbol{x} \mapsto x_j$ spojitá na $\mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$.

V.3 Parciální derivace

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$.**

Poznámky. (1) Symbol x_j v zápise $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ označuje j-tou proměnnou; proto místo něj používáme označení j-té proměnné podle kontextu – takže píšeme například $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, někdy též $\partial_j f$.

(2) Označíme-li $\varphi(x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$, pak φ je funkce jedné proměnné a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \varphi'(a_j),$$

je-li alespoň jeden z uvedených výrazů definován.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{x}$

- **maximum na M**, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M : \ f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,
- **lokální maximum vzhledem k M**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : \ f(\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x})$,

Analogicky se definuje **minimum** na M a **lokální minimum** vzhledem k M.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ **lokální maximum**, má-li v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$. Podobně pro lokální minimum.

Věta 7 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Int} M$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce $f : M \to \mathbf{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém (vzhledem k M). Pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ neexistuje nebo je nulová.*