

IV.4 Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží

Poznámka. Jméno Laurent se čte francouzsky, tj. přibližně **Lorán**.

Definice. Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad (*)$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady (*) rozumíme mocninovou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

hlavní částí řady (*) rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n. \quad (**)$$

Říkáme, že **hlavní část řady (*) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , lokálně stejnoměrně na množině M , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady (*)** a značíme jej rovněž (**).

Říkáme, že **řada (*) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , lokálně stejnoměrně na množině M , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady (*)** rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice. Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu a , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R** .

Poznámka. V definici mezikruží se připouští i hodnoty $r = 0$ či $R = +\infty$. V těchto speciálních případech platí

- $P(a, 0, R) = P(a, R)$ pro $R \in (0, +\infty)$;
- $P(a, r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{U(a, r)}$ pro $r \in (0, +\infty)$;
- $P(a, 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Větička 8. Mějme Laurentovu řadu (*). Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$.
- Hlavní část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Větička 9. Necht' $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Necht'

$$G = P(a, r, R) \setminus \{a + te^{i\theta} : t \in (0, +\infty)\}.$$

Pak pro množinu G platí Cauchyova věta, tj., pro každou f holomorfní na G a každou uzavřenou cestu φ v G platí $\int_{\varphi} f = 0$.

Poznámka: V případě, že $r = 0$, je množina G z Větičky 9 hvězdovitá (viz poznámku za definicí rezidua). V obecném případě se několikrát použije poznámka o nalepování za Větou III.13.

Věta 10. Necht' f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pro $\rho \in (r, R)$ označme φ_{ρ} kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru ρ . Pak platí:

- (a) $\int_{\varphi_{\rho}} f$ nezávisí na ρ , tj. nabývá stejné hodnoty pro každé $\rho \in (r, R)$.
- (b) (Cauchyův vzorec pro mezikruží) Necht' $z \in P(a, r, R)$ a $r < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < R$. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw \right).$$

Věta 11. Necht' f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

o středu a , která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\rho}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_{ρ} je jako ve Větě 5.

Věta 12. Necht' f je holomorfní funkce v $P(a, R) = P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Necht' $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak platí:

- (1) f má v bodě a odstranitelnou singularitu, právě když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.
- (2) f má v bodě a pól násobnosti p , právě když $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -p$. V tom případě a_{-1}, \dots, a_{-p} jsou koeficienty z Věty 2(2).
- (3) f má v bodě a podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

Navíc ve všech případech platí $\text{res}_a f = a_{-1}$.

Věta 13 (reziduová věta – druhá verze). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus M$ je uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_{\varphi} g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω . Pak pro každou f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{a \in M} \text{res}_a f \cdot \text{ind}_{\varphi} a.$$