Důkaz Věty I. 3

f buď komplexní fce komplexní proměnné, $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$$f(x+iy) = \tilde{f}_1(x,y) + i\,\tilde{f}_2(x,y),$$

tj.

$$\tilde{f}_1(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad \tilde{f}_2(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

(a) f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné
$\iff$ $\tilde{f}$ má v bodě (a,b) totální diferenciál
a $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a,b)$ & $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a,b)$

[$w \in \mathbb{C}$, $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Pak

$$f'(z) = w \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = w \iff$$

$(h = h_1 + i h_2 \in \mathbb{C})$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - w \cdot h}{h} = 0 \iff$$

↑ $\frac{h}{|h|}$ i $\frac{|h|}{h}$ jsou omezené na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - w \cdot h}{|h|} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{\left(\tilde{f}_1(a+h_1, b+h_2), \tilde{f}_2(a+h_1, b+h_2)\right) - \left(\tilde{f}_1(a,b), \tilde{f}_2(a,b)\right) - (h_1, h_2)\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$\iff$ $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ má v bodě (a,b) totální diferenciál reprezentovaný maticí

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

Protože prvky reprezentující matice totálního diferenciálu jsou příslušné parciální derivace (zde konkrétně

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a,b) = u, \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a,b) = -v$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a,b) = v \quad \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a,b) = u \;),$$

je důkaz ekvivalence hotov. ⌋

(b) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a,b) roven $|f'(z)|^2$

⌈ plyne z výpočtu v (a) ... $\det\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = u^2+v^2 = |w|^2$ ⌋

Spec. Jacobiho matice $\tilde{f}$ v (a,b) je regulární $\iff f'(z) \neq 0$

⌈ to je nyní jasné ⌋