## III.3 Spojité větve logaritmu, index bodu ke křivce

**Věta 8.** *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která na $\langle\varphi\rangle$ nenabývá hodnoty 0. Pak existuje spojitá funkce $L : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $f(\varphi(t)) = e^{L(t)}$ pro $t \in [a,b]$. Jsou-li $L_1$ a $L_2$ dvě takové funkce, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $L_1(t) - L_2(t) = 2k\pi i$ pro $t \in [a,b]$.*

*Je-li navíc $\varphi$ cesta, $f$ je holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a $f'$ spojitá na $\langle\varphi\rangle$, lze volit*

$$L(t) = \log(f(\varphi(a))) + \int_a^t \frac{f'(\varphi(s))}{f(\varphi(s))}\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

**Definice.** Nechť $\varphi$, $f$ a $L$ jsou jako ve Větě 8. Pak **přírůstkem logaritmu funkce** $f$ **podél křivky** $\varphi$ rozumíme číslo

$$\Delta_\varphi \log(f) = L(b) - L(a).$$

**Větička 9.** *Je-li $\varphi$ cesta, $f$ holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a $f'$ spojitá na $\langle\varphi\rangle$, pak*

$$\Delta_\varphi \log(f) = \int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

**Poznámka.** Později dokážeme, že je-li $f$ holomorfní, je $f'$ automaticky spojitá.

**Definice.** Nechť $\varphi$ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu** $a$ **vzhledem ke křivce** $\varphi$ je definován vzorcem

$$\mathrm{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

**Poznámka.** Je-li $\varphi$ uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, pak $\mathrm{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\varphi \log(z-a)$.

**Definice.** Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina. Množinu $A \subset M$ nazveme **komponentou množiny** $M$, je-li maximální souvislou podmnožinou $M$ (tj. je-li $A$ souvislá a přitom každá množina $B$ splňující $A \subsetneq B \subset M$ je nesouvislá).

**Větička 10.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak každá její komponenta je otevřená množina.*

**Věta 11** (vlastnosti funkce $\mathrm{ind}_\varphi a$). *Nechť $\varphi$ je uzavřená cesta. Pro $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ položme $\iota(a) = \mathrm{ind}_\varphi a$.*

(1) *Funkce $\iota$ nabývá jen celočíselných hodnot.*
(2) *Funkce $\iota$ je konstantní na každé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*
(3) *Funkce $\iota$ je rovna nule na neomezené komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*

**Poznámky.** (1) Je-li $\varphi$ kladně orientovaná kružnice o středu $a$ a poloměru $r$, pak

$$\operatorname{ind}_\varphi z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in U(a,r), \\ 0, & \text{je-li } |z-a| > r. \end{cases}$$

(2) Platí **Jordanova věta**: Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uzavřená cesta taková, že $\varphi$ je prostá na $[a,b)$, pak množina $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty – jednu neomezenou (na ní je index roven nule) a jednu omezenou (na ní je index roven buď 1 nebo $-1$).

(3) Platí následující **propichovací věta**: Nechť $\varphi$ je uzavřená cesta, $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že $b-a > 0$, úsečka spojující body $a, b$ protíná $\langle\varphi\rangle$ v jediném bodě $z_0$, ten je různý od $a, b$, existuje jediné $t_0$, pro které $\varphi(t_0) = z_0$, a $\operatorname{Im}\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak

$$\operatorname{ind}_\varphi a - \operatorname{ind}_\varphi b = \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\varphi'(t_0).$$