III.1 Křivky a křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Definice. **Křivkou v** $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, tj. spojitou funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu

$$\langle\varphi\rangle = \varphi([a,b]) = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\};$$

- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou k** φ rozumíme křivku $\dot{-}\,\varphi : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{-}\,\varphi(t) = \varphi(-t)$;
- je-li navíc $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b+d-c]$ vzorcem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b], \\ \psi(t-b+c), & t \in [b, b+d-c]; \end{cases}$$

- **délkou křivky** φ rozumíme

$$V(\varphi) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu** a **a poloměru** r. Opačnou křivku nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[a,b]$.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce** f **podél cesty** φ vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Větička 1. *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta.*

(1) *Nechť h je rostoucí zobrazení intervalu $[c,d]$ na interval $[a,b]$, které je třídy C^1. Pak*

$$\int_{\varphi\circ h} f = \int_\varphi f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(2) $\displaystyle\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f$ *pro každou spojitou* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

(3) *Je-li* $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ *cesta splňující* $\psi(c) = \varphi(b)$, *pak*

$$\int_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(4) $\displaystyle\left|\int_{\varphi} f\right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)|$ *pro každou spojitou* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

Větička 2. *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak*

$$f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k** f **na** G, pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Větička 3. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a,b] \to G$ platí $\displaystyle\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.*

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 4 (charakterizace oblasti). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *Ω je* **souvislá** *(tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).*

(b) *Ω je* **křivkově souvislá** *(tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to \Omega$, pro které $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$).*

(c) *Každé dva body v Ω lze spojit lomenou čárou v Ω (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje konečná posloupnost bodů $z = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ taková, že pro každé $j = 1, \dots, n$ úsečka spojující u_{j-1} a u_j leží celá v Ω).*

Definice. Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Věta 5 (primitivní funkce a křivkový integrál). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *f má v Ω primitivní funkci.*

(ii) *Křivkový integrál v Ω* **nezávisí na cestě**, *tj. kdykoli $\varphi : [a,b] \to \Omega$ a $\psi : [c,d] \to \Omega$ jsou dvě cesty splňující $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\displaystyle\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.*

(iii) *Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a,b] \to \Omega$ je $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.*