V.2 Globální vlastnosti holomorfních funkcí

Lemma 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je funkce holomorfní na Ω. Pak funkce $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z,w \in \Omega, z \neq w, \\ f'(z), & z,w \in \Omega, z = w, \end{cases}$$

je spojitá na $\Omega \times \Omega$.

Věta 2 (globální Cauchyova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

Poznámky: (1) Pokud $\int_\Gamma f = 0$ pro každou f holomorfní v Ω, pak $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

(2) Je-li $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je souvislá, jsou předpoklady věty splněny pro každý cykl v Ω.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.

Věta 4 (princip argumentu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť f je funkce holomorfní na Ω, která na $\langle \Gamma \rangle$ nenabývá hodnoty 0. Je-li $a \in \Omega$ kořenem funkce f, označme $N_f(a)$ jeho násobnost. Pak platí:*

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \log f.$$

Věta 5 (Rouchéova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť f a g jsou holomorfní na Ω a pro každé $z \in \langle \Gamma \rangle$ platí*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Pak (při značení z Věty 4)

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a.$$

Věta 6. *Nechť f je holomorfní na $U(a,R)$, $b = f(a)$ a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ (tj. f* **nabývá své hodnoty v bodě** *a p-***násobně***). Pak existuje $r \in (0,R)$ a $\rho > 0$ tak, že pro každé $w \in P(b,\rho)$ f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $U(a,r)$.*

Věta 7 (věta o otevřeném zobrazení). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ pro každou $G \subset \Omega$ otevřenou.*

Věta 8 (věta o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a $f'(a) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ s následujícími vlastnostmi:*

(i) *f je prostá na $U(a,r)$;*
(ii) *$G = f(U(a,r))$ je otevřená množina;*
(iii) *inverzní funkce f^{-1} je holomorfní na G a pro každé $z \in G$ platí*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Věta 9. *Nechť f je funkce holomorfní a prostá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak pro každé $z \in \Omega$ je $f'(z) \neq 0$ a inverzní funkce k f je holomorfní na $f(\Omega)$.*