

Tvrzení 49 Necht $(X, \|\cdot\|)$ je NLP, $\dim X = \infty$. Paž:

- (a) Existuje nespojitý lineární funkcionál $f: X \rightarrow \mathbb{F}$.
(b) Na X existuje norma, která není ekvivalentní $\|\cdot\|$.

Důkaz: Připomeneme tvrzení z lineární algebry:

T1: Každý vektorový prostor má bázi.

T2 Necht X, Y jsou dva vektorové prostory. Necht $B \subset X$ je báze. Paž každý zobrazení $\Phi: B \rightarrow Y$ lze (pravidelně zprůsohem) rozšířit na lineární zobrazení $L: X \rightarrow Y$.

Necht B je báze prostoru X . Protože $\dim X = \infty$, je B nekonečná množina. BÚNO můžeme předpokládat, že $\|b\| = 1$ pro každé $b \in B$.

Necht (b_n) je posloupnost v B

(a) Dle T2 existuje $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ lineární, pro které platí $f(b_n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě f není spojitý
($\sup_{x \in B_X} \|f(x)\| = \infty$)

(b) Dle T2 existuje $L: X \rightarrow X$ lineární, pro které platí:

$$L(b_n) = nb_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$L(b) = b, \quad b \in B \setminus \{b_n: n \in \mathbb{N}\}$$

Paž L je bijektivní a norma $\|x\| = \|Lx\|$, $x \in X$

není ekvivalentní $\|\cdot\|$

$$\left(\begin{array}{l} \|b_n\| = 1 \\ \|nb_n\| = n \end{array} \right)$$

Důkaz T1 : Báze je množina, která je lineárně nezávislá a zároveň generativní

Pozorování : $B \subset X$ maximální lineárně nezávislá

(tj B lineárně nezávislá, a pokud je $\tilde{B} \supset B$ lineárně nezávislá, pak $\tilde{B} = B$)

$\Rightarrow B$ je báze

Stačí ukázat, že B je generativní. Kdyby ne, existuje $x \in X$, který není

lineární kombinací prvků B . Pak $x \notin B$ a $B \cup \{x\}$ je lineárně nezávislá -

$\nexists y_1, \dots, y_n \in B \cup \{x\}$ majícím rovnost, $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$, $d_1 y_1 + \dots + d_n y_n = 0$

• $x \notin \{y_1, \dots, y_n\} \Rightarrow d_1 = \dots = d_n = 0$ (B je lineárně nezávislá, $y_1, \dots, y_n \in B$)

• $x \in \{y_1, \dots, y_n\}$... buďto $x = y_1$. Pokud $d_1 \neq 0$, vynásobíme a použijeme předchozí případ. Pokud $d_1 = 0$, pak $x = y_1 = -\frac{d_2}{d_1} y_2 - \dots - \frac{d_n}{d_1} y_n$, tedy x je lineární kombinací prvků B ... správně $\downarrow$

Ato je správně s maximální B

Stačí teď ukázat existenci maximální lineárně nezávislé množiny.

To plyne z Zornova lemmatu: $\mathcal{A} =$ lineárně nezávislé podmnožiny X

$\mathcal{A} \neq \emptyset$, protože $\emptyset \in \mathcal{A}$

$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \dots A_1 \leq A_2 \stackrel{\text{df}}{=} A_1 \subset A_2$

To je právě to uspořádání,

$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ řetězec $\Rightarrow \cup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ je horní zhruba

$\nexists x_1, \dots, x_n \in \cup \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} : x_i \in A_1 \dots x_n \in A_n$

$\mathcal{A}$ je řetězec $\Rightarrow$ podle množin $A_1, \dots, A_n$ je nepřetínající

tj ex. $j : A_i \subset A_j$ pro každé j . Prvky A_j je lineárně

nezávislé, je i $\{x_1, \dots, x_n\}$ lineárně nezávislá $\downarrow$

Tedy jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu. Proto existuje maximální lineárně nezávislá množina.

Důkaz T2 : X, Y vektorový prostor, $B \subset X$ báze, $\Phi : B \rightarrow Y$

Pak $\exists ! L : X \rightarrow Y$ lineární : $L|_B = \Phi$:

① $x \in X \Rightarrow$ ex. rozklad $(c_b)_{b \in B} \subset \mathbb{F}$, takže je jen lineární mnohočetnost, že $x = \sum_{b \in B} c_b \cdot b$. Pak L lineární a $L|_B = \Phi$, protože $L(x) = \sum_{b \in B} c_b L(b) = \sum_{b \in B} c_b \Phi(b)$

To díky jednoznačnosti a zobrazení násobí, jak definujeme L .

② Vzeš z ① dobře definovaný zobrazení L , protože koeficienty $(c_b)_{b \in B}$ jsou jednoznačně určeny

③ Takto definované L je lineární, protože zobrazení $x \mapsto c_b(x)$ je lineární - pro každé $b \in B$ $(c_b(x))$ je rozklad x ve vektoru x .