V. Spektrum operátoru

Pro následující operátory $T \in L(X)$ určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

1. $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$. **2.** $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

3. $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$. **4.** $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{1+i}{n} x_n)_{n=1}^\infty$.

5. $X = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n} x_n)_{n=1}^\infty$. **6.** $X = c_0$, $T((x_n)) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots)$.

7. $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n} x_n)_{n=1}^\infty$. **8.** $X = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1} x_n)_{n=1}^\infty$.

9. $X = \ell^1$, $T((x_n)) = (q_n x_n)_{n=1}^\infty$, kde $\{q_n; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

10. $X = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$. **11.** $X = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f,\ t \in [0,1]$.

12. $X = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$. **13.** $X = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})^+ \cdot f(t)$.

14. $X = \mathcal{C}([-1,1])$, $T(f)(t) = f(|t|)$. **15.** $X = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;

16. $X = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})^+ \cdot f(t),\ t \in [0,1]$;

17. $X = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f) = (\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}) \cdot f$.

18. $X = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = tf(t)$.

19. $X = L^p(\mathbb{R})$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(-t)$. **20.** $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(-t)$.

21. $X = L^p(\mathbb{R})$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(t-1)$. **22.** $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(t-1)$.

23. $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(2t)$. **24.** $X = L^p(\mathbb{R})$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(2t)$.

Výsledky a návody. **1.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = B(0,1)$. (Použije se, že $\|T\| = 1$ a že pro každé $\lambda \in B(0,1)$ vektor $\mathbf{e}_1$ neleží v oboru hodnot T.) **2.** $\sigma_p(T) = U(0,1)$, $\sigma(T) = B(0,1)$. (Druhá rovnost se odvodí z toho, že spektrum je uzavřená množina a $\|T\| = 1$.) **3.** $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0,1\}$. **4.** $\sigma_p(T) = \{\frac{1+i}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. **5.** $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. **6.** $\sigma_p(T) = \{1\} \cup \{\frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. **7.** $\sigma_p(T) = \{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$. **8.** $\sigma_p(T) = \{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$. **9.** $\sigma_p(T) = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\sigma(T) = [0,1]$. **10.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{1\}$. **11.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$. (Operátor T není na, proto $0 \in \sigma(T)$. Pro $\lambda \neq 0$ je operátor $\lambda I - T$ prostý a na, jak plyne z řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Alternativně lze použít, že T je kompaktní.) **12.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$. **13.** $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = [0, \frac{1}{2}]$. **14.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{0,1\}$. **15.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{0,1\}$. **16.** $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = [0, \frac{1}{2}]$. **17.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{-1,1\}$. **18.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$. **19.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{-1,1\}$. (Pro ostatní λ se spočte inverzní operátor k $\lambda I - T$ řešením rovnic $(\lambda I - T)f = g$ a $(\lambda I - T)Tf = Tg$.) **20.** $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{-1,1\}$. (Pro ostatní λ se spočte inverzní operátor k $\lambda I - T$ řešením rovnic $(\lambda I - T)f = g$ a $(\lambda I - T)Tf = Tg$.) **21.** Pro $p = \infty$ je $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$. (Protože T je izometrie, je spektrum částí jednotkové kružnice.) Pro $p < \infty$ je $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, proto spektrum musí být částí jednotkové kružnice;

pro $|\lambda| = 1$ funkce $\chi_{[0,1]}$ nepatří do oboru hodnot $\lambda I - T$). **22.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, proto spektrum musí být částí jednotkové kružnice; pro $|\lambda| = 1$ funkce, která je nulová mimo $[0,1]$ a nenulová uvnitř tohoto intervalu, nepatří do oboru hodnot $\lambda I - T$). **23.** $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, proto spektrum musí být částí jednotkové kružnice; pro $|\lambda| = 1$ funkce, která je nulová mimo $[1,2]$ a nenulová uvnitř tohoto intevalu, nepatří do oboru hodnot $\lambda I - T$). **24.** Pro $p = \infty$ je $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$. (Protože T je izometrie, je spektrum částí jednotkové kružnice.) Pro $p < \infty$ je $\sigma_p(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 2^{-1/p}\}$. (Platí $\|Tf\|_p = 2^{-1/p}\|f\|_p$, tedy spektrum musí být částí oné kružnice. Přitom pro $|\lambda| = 2^{-1/p}$ funkce $\chi_{[1,2]}$ není v oboru hodnot $\lambda I - T$ a zároveň je tento operátor prostý.)