II. Ortonormální báze, ortogonální projekce a nejbližší body

V následujících příkladech je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a případně nějaké body z H. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y, popište ortogonální doplněk $Y^\perp$ a najděte nejbližší body v Y k zadaným bodům. Prostory jsou reálné či komplexní, se standardním skalárním součinem.

1. $H = \mathbb{F}^3$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; body a) $(1, 1, 1)$; b) $(1, 2, 3)$.
2. $H = \mathbb{C}^4$, $Y = \{(x_1, \dots, x_4); x_2 = ix_1, x_4 = (1+i)x_3\}$; body a) $(1, i, 1, 1)$; b) $(1, 1, 1-i, -1)$.
3. $H = L^2((0,1))$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2;
body a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = x^3$.
4. $H = L^2((-\pi,\pi))$, Y je podprostor tvořený lichými funkcemi;
body a) $f(x) = \cos x$; b) $f(x) = x^2 + x + 1$.
5. $H = L^2((-\pi,\pi))$, Y je podprostor generovaný funkcemi sin a cos;
body a) $f(x) = 1$, b) $f(x) = x$; c) $f(x) = x^2$; d) $f(x) = e^x$.
6. $H = L^2((0,\frac{\pi}{2}))$, Y je podprostor generovaný funkcemi sin a cos;
body a) $f(x) = 1$, b) $f(x) = x$; c) $f(x) = x^2$; d) $f(x) = e^x$.
7. $H = L^2((0,\infty))$, pro $\alpha > 0$ definujme funkci $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$, $Y = \mathrm{span}\{f_1, f_2, f_3\}$; bod f_β (kde $\beta \in (0,\infty)$).

- -

Výsledky a návody. **1.** ON báze Y je například $\{(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0), (\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6})\}$. To lze buď uhodnout nebo spočítat ortogonalizací báze $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. OG projekce je $P(x_1,x_2,x_3) = (\frac23 x_1 - \frac13 x_2 - \frac13 x_3, -\frac13 x_1 + \frac23 x_2 - \frac13 x_3, -\frac13 x_1 - \frac13 x_2 + \frac23 x_3)$. OG doplněk je podprostor dimenze 1 generovaný vektorem $(1,1,1)$. Nejbližší body: a) $(0,0,0)$, b) $(-1,0,1)$. **2.** ON báze Y je například $\{(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{i}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1+i}{\sqrt3})\}$. OG projekce je $P(x_1,\dots,x_4) = (\frac12(x_1 - ix_2), \frac12(ix_1 + x_2), \frac13 x_3 + \frac{1-i}{3}x_4, \frac{1+i}{3}x_3 + \frac23 x_4)$. $Y^\perp$ je podprostor dimenze 2 generovaný vektory $(1,-i,0,0)$ a $(0,0,1-i,-1)$. Nejbližší body a) $(1, i, \frac23 - \frac13 i, 1 + \frac13 i)$, b) $(\frac12(1-i), \frac12(1+i), 0, 0)$. **3.** ON báze Y je například $\{1, x \mapsto 2\sqrt3 x - \sqrt3, x \mapsto \sqrt{180}(x^2 - x + \frac16)\}$, kterou lze spočíst ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$. OG projekce má tvar $P(f)(x) = x^2 \cdot \int_0^1 180(t^2 - t + \frac16) f(t)\,\mathrm{d}t - x \cdot \int_0^1 (180t^2 - 192t + 36) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (30t^2 - 36t + 9) f(t)\,\mathrm{d}t = 180(x^2 - x + \frac16) \cdot \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (180x^2 - 192x + 36) \cdot \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t + (30x^2 - 36x + 9) \cdot \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Ortogonální doplněk tvoří ty funkce $f \in L^2((0,1))$, pro které platí $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. (To je zřejmé z definic, explicitnější popis se najde těžko.) Nejbližší body: a) $f(x) = (330\cos 1 + 180 \sin 1 - 330)x^2 - (336 \cos 1 + 168 \sin 1 - 324)x + 57 \cos 1 + 24 \sin 1 - 51$, b) $f(x) = (210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105$, c) $f(x) = -\frac{39}{14}x^2 + \frac{129}{35} - \frac{93}{140}$. **4.** ON báze je například $\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt\pi}\sin kx; k \in \mathbb{N}\}$, což plyne z teorie Fourierových řad. OG projekce lze vyjádřit buď pomocí Fourierovy řady $P(f)(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac1\pi(\int_{-\pi}^\pi f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t) \cdot \sin kx$, kde konvergence řady je v normě prostoru $L^2((-\pi,\pi))$, nebo jednodušeji $Pf(x) = \frac12(f(x) - f(-x))$. Ortogonální doplněk tvoří sudé funkce. Nejbližší body: a) 0, b) $f(x) = x$. **5.** ON báze je například $\{\frac{\sin}{\sqrt\pi}, \frac{\cos}{\sqrt\pi}\}$. OG projekce je dána vzorcem $Pf(x) = \frac1\pi(\sin x \cdot \int_{-\pi}^\pi f(t) \sin t\,\mathrm{d}t + \cos x \cdot \int_{-\pi}^\pi f(t) \cos t\,\mathrm{d}t)$. OG doplněk tvoří ty $f \in L^2((-\pi,\pi))$, v jejichž Fourierově řadě jsou koeficienty u $\sin x$ a $\cos x$ nulové. Nejbližší body: a) 0, b) $2\sin$, c) $-4\cos$, d) $\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}(\sin - \cos)$. **6.** ON báze je například $\{\frac{2}{\sqrt\pi}\sin, -\frac{4}{\sqrt{\pi(\pi^2-4)}}\sin + 2\sqrt{\frac{\pi}{\pi^2-4}}\cos\}$ (spočte se ortogonalizací dvojice $\{\sin, \cos\}$). OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = \frac{4}{\pi^2-4}(\pi \sin(x) - 2\cos(x)) \int_0^{\frac\pi2} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t + \frac{4}{\pi^2-4}(\pi \cos x - 2 \sin x) \int_0^{\frac\pi2} f(t) \cos t\,\mathrm{d}t$. Ortogonální doplněk tvoří ty funkce $f \in L^2((0,\frac\pi2))$, pro které platí $\int_0^{\frac\pi2} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac\pi2} f(t) \cos t\,\mathrm{d}t = 0$. (To je zřejmé z definic, explicitnější popis se najde těžko.) Nejbližší body: a) $\frac{4}{\pi+2}(\sin + \cos)$, b) $\frac{2(\pi^2-2\pi-4}{\pi^2-4}\cos + \frac{8}{\pi^2-4}\cos$, c) $\frac{\pi^3-16\pi+16}{\pi^2-4}\cos + \frac{2(\pi^2-4\pi+8)}{\pi^2-4}\sin$,
d) $\frac{2(\pi-2)e^{\frac\pi2} - 2\pi - 4}{\pi^2-4}\cos + \frac{2(\pi-2)e^{\frac\pi2} + 2\pi + 4}{\pi^2-4}\sin$. **7.** ON báze je například $\{t \mapsto \sqrt2 e^{-t}, t \mapsto 6e^{-2t} - 4e^{-t}, t \mapsto 10\sqrt6 e^{-3t} - 12\sqrt6 e^{-2t} + 3\sqrt6 e^{-t}\}$ (spočte se ortogonalizací báze $\{f_1, f_2, f_3\}$). OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = (72e^{-x} - 240e^{-2x} + 180e^{-3x}) \int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + (-240e^{-x} + 900e^{-2x} - 720e^{-3x}) \int_0^\infty f(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t + (180e^{-x} - 720e^{-2x} + 600e^{-3x}) \int_0^\infty f(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t$. OG doplněk tvoří ty funkce $f \in L^2((0,\infty))$, pro které $\int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty f(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t = 0$. (To je zřejmé z definic, explicitnější popis se najde těžko.) Nejbližší bod k f_β je $f(x) = \frac{12\beta^2 - 60\beta + 72}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-x} - \frac{60\beta^2 - 240\beta + 180}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-2x} + \frac{60\beta^2 - 180\beta + 120}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-3x}$.