III.4 Kompaktní operátory

Definice. Nechť $X = (X, d)$ je metrický prostor a $A \subset X$. Řekneme, že množina A je

- **relativně kompaktní v** X, pokud její uzávěr $\overline{A}$ je kompaktní v X;
- **totálně omezená**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_n \in A$ takových, že $A \subset \bigcup_{j=1}^n U(x_j, \varepsilon)$.

Připomenutí: Nechť X je úplný metrický prostor a $A \subset X$. Pak platí:

- A je kompaktní, právě když je uzavřená a totálně omezená.
- A je relativně kompaktní, právě když je totálně omezená.

Definice. Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Operátor T se nazývá

- **kompaktní**, je-li $T(B_X)$ relativně kompaktní v Y;
- **konečnědimenzionální**, pokud je jeho obor hodnot $R(T)$ konečné dimenze.

Poznámka: Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ lineární zobrazení (ne nutně spojité).

- Pokud $T(B_X)$ je relativně kompaktní v Y, pak T je spojitý, tj. $T \in L(X, Y)$.
- $R(T)$ může být konečné dimenze i pro nespojitá T. Nicméně my budeme konečnědimenzionálním operátorem nazývat pouze spojité operátory, jejichž obor hodnot je konečné dimenze.

Značení: Nechť X a Y jsou Banachovy prostory.

- Symbolem $K(X, Y)$ značíme množinu všech kompaktních operátorů X do Y.
- Symbolem $F(X, Y)$ značíme množinu všech (spojitých) konečnědimenzionálních operátorů X do Y.

Větička 22 (charakterizace kompaktních operátorů). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak T je kompaktní, právě když pro každou omezenou posloupnost (x_n) v X má posloupnost (Tx_n) konvergentní podposloupnost.*

Věta 23 (vlastnosti kompaktních a konečnědimenzionálních operátorů). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory. Pak platí:*

(a) *Nechť $T \in F(X,Y)$. Pak existují $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ tak, že*
$$Tx = \sum_{j=1}^n x_j^*(x) y_j, \quad x \in X.$$
Obráceně, je-li T dáno takovýmto vzorcem, pak $T \in F(X,Y)$.

(b) *$K(X,Y)$ je uzavřený lineární podprostor $L(X,Y)$.*

(c) *$F(X,Y)$ je lineární podprostor $K(X,Y)$.*

(d) *Nechť Z_1 a Z_2 jsou Banachovy prostory a $S_1 \in L(Z_1,X)$, $S_2 \in L(Y,Z_2)$. Pak*
- *$S_2TS_1 \in F(Z_1,Z_2)$ pro každé $T \in F(X,Y)$; a*
- *$S_2TS_1 \in K(Z_1,Z_2)$ pro každé $T \in K(X,Y)$.*

Definice. Nechť K je metrický (nebo obecněji topologický) prostor a A je nějaká množina spojitých funkcí (reálných či komplexních) definovaných na K. Řekneme, že množina A je **stejně spojitá**, pokud
$$\forall x \in K\ \forall \varepsilon > 0\ \exists U \subset K \text{ okolí } x\ \forall y \in U\ \forall f \in A : |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Věta 24 (Arzelà-Ascoli). *Nechť K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor a $A \subset \mathcal{C}(K)$. Pak A je relativně kompaktní, právě když je omezená a stejně spojitá.*

Věta 25 (Schauderova o duálním operátoru). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$. Pak T je kompaktní, právě když T' je kompaktní.*