Otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, uzávěr, hranice

1. Nechť $x \in \mathbf{R}^n$ a $r > 0$. Označme $A = B(x, r)$ a $B = \{y \in \mathbf{R}^n : \rho(x, y) \leq r\}$. Ukažte, že A je otevřená a B uzavřená. Určete vnitřek, uzávěr a hranici obou množin.
2. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Ukažte, že

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : (\forall r > 0)(B(\boldsymbol{x}, r) \cap A \neq \emptyset)\}.$$

Z toho odvoďte rovnosti

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup H(A), \quad H(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A.$$

3. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Ukažte, že platí:
(i) $H(A) = H(\mathbf{R}^n \setminus A)$, (ii) $\operatorname{int} A = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathbf{R}^n \setminus A}$, (iii) $\overline{A} = \mathbf{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbf{R}^n \setminus A)$.
4. Pro následující podmnožiny $\mathbf{R}$ zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
(a) $\mathbf{N}$, (b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, (c) $\mathbf{Q}$, (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\}$.
5. Načrtněte následující podmnožiny $\mathbf{R}^2$, zjistěte, zda jsou otevřené nebo uzavřené, a určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici:
(a) $A = \{[x, y] : x \geq 0, y > 0\}$, (b) $B = \{[x, y] : y < \sin x\}$,
(c) $C = \{[x, y] : (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \leq 0\}$, (d) $D = \{[x, y] : (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) < 0\}$.
6. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbf{R}$ je funkce spojitá na G. Ukažte, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ jsou množiny

$$\{\boldsymbol{x} \in G : f(\boldsymbol{x}) > c\}, \qquad \{\boldsymbol{x} \in G : f(\boldsymbol{x}) < c\}$$

otevřené v $\mathbf{R}^n$.
7. Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbf{R}$ je funkce spojitá na F. Ukažte, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ jsou množiny

$$\{\boldsymbol{x} \in F : f(\boldsymbol{x}) \geq c\}, \qquad \{\boldsymbol{x} \in F : f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$$

uzavřené v $\mathbf{R}^n$.

Parciální derivace

8. Pro následující funkce určete jejich definiční obor a spočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných ve všech bodech, kde existují:
a) x^y, b) $x^{(y^z)}$, c) $\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
e) $\sqrt{xy}$, f) $|y - x^2|$, g) $|y - x^3|$, h) $|y^2 - x^2|$, i) $x \cdot [y]$.

Extrémy – elementární metody

9. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
(a) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy + y$, $M = \{[x, y] : 2|x| + |y| \leq 3\}$;
(b) $f(x, y) = x^2 + xy$, $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 < 4\}$;
(c) $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$, $M = \mathbf{R}^2$;
(d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + 2y + 1}$, $M = \{[x, y] : x > 0, y > 0\}$.

Extrémy – použití věty o multiplikátorech

10. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá:
(a) $f(x,y,z)=\frac{x}{y}$, $M=\{[x,y,z]: x^2+(y-3)^2+z^2\le 1, y+z\le 4$;
(b) $f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2$, $M=\{[x,y,z]: x^2+y^2=z^2, xy\ge 1\}$;
(c) $f(x,y,z)=yz$, $M=\{[x,y,z]: x^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 1\}$;
(d) $f(x,y,z)=xy+z$, $M=\{[x,y,z]: x^2+y^2=2, xyz\ge 1, z\ge 0\}$.

Aplikace věty o implicitních funkcích

11. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0,y_0]$ implicitně zadanou funkci $y=f(x)$. Spočtěte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě x_0:
(a) $x^y=y^x$, $[x_0,y_0]=[2,4]$; (b) $\operatorname{arctg}(y-x)+\operatorname{arctg}\frac{y^2}{x}=\frac{\pi}{4}$, $[x_0,y_0]=[1,1]$;
(c) $x^2e^{y^2}=ye^x$, $[x_0,y_0]=[1,1]$; (d) $\sin(xy)+\cos(x+y)+1=0$, $[x_0,y_0]=[\pi,0]$;
(e) $e^{(\frac{x}{y}-1)}+e^{x-y^2}=2$, $[x_0,y_0]=[1,1]$.

12. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]$ implicitně zadanou funkci $z=f(x,y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[x_0,y_0]$.
(a) $x^{y^z}+z^{x^y}=2y^{z^x}$, $[x_0,y_0,z_0]=[1,1,1]$;
(b) $e^{xy}+e^{yz}+e^{xz}=e^{xyz}$, $[x_0,y_0,z_0]=[0,2,0]$.

13. Dokažte, že existují funkce $y=y(x)$ a $z=z(x)$ třídy C^∞ na okolí bodu 0, které splňují $y(0)=z(0)=-1$ a vztahy

$$6xyz-x-2y-3z=5, \qquad e^{xz}=yz.$$

Spočtěte $y'(0), z'(0), y''(0)$ a $z''(0)$.

Počítání s maticemi

14. Určete hodnost následujících matic (v závislosti na parametru):

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8\\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20\\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19\\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & x & x+1\\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & y & 2 & 1\\ 2 & 3 & x & x & y\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2\\ 1 & 2 & x\\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Najděte inverzní matice k následujícím maticím (v závislosti na parametru)

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2\\ 14 & -4 & 18 & 0\\ 12 & -4 & 16 & 0\\ 9 & -2 & 15 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14\\ 10 & 2 & 4 & 28\\ 0 & 0 & 0 & 7\\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Spočtěte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7\\ 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7\\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6\\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6\\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7\\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8\\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

Řešení soustav lineárních rovnic

17. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

18. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené dva vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

19. Pro která $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ má soustava $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení? Najděte všechna řešení pro uvedený vektor pravých stran.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \text{ pravá strana } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vyšetřování konvergence řad

20. Pro následující řady určete, zda konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!\cdot(2n+1)!\cdot(-7)^n}{(3n)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n+700)!n!(-8)^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1})$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}$, (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log\frac{1}{n}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin\frac{1}{n}\right)$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

(k) $\sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+17n}}$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1 - \cos(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}))$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n})$, (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}$, (o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$.