K oddílu VIII.2 – druhá část, výpočet Riemannova integrálu

Doplněk k definici Riemannova integrálu

- $\int_a^b f$ jsme definovali pro funkce f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$.

  V tom je implicitně zahrnut předpoklad, že $a < b$.

  Budeme ovšem z formálních důvodů potřebovat rozšířit tuto definici i na případ $a = b$ a $a > b$. To uděláme následovně:

  - $\displaystyle\int_a^a f = 0$, pokud f je definovaná v bodě a;
  - $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$, pokud $a > b$ a f má Riemannův integrál přes interval $\langle b, a\rangle$.

- Tato rozšířená definice nám umožňuje zformulovat následující pomocné tvrzení zobecňující bod (ii) z Věty VIII.3:

  Lemma A. *Nechť $a < b$ a f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$. Pak pro každou trojici $\alpha, \beta, \gamma \in \langle a, b\rangle$ platí*

  $$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f.$$

  Důkaz: Nejprve si uvědomme, že všechny tři integrály jsou definované díky bodu (i) z Věty VIII.3.

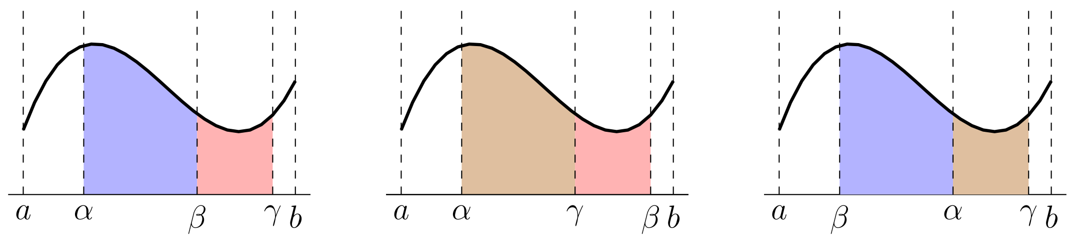
  Pokud $\alpha = \gamma$, pak dokazovaná rovnost má tvar

  $$\underbrace{\int_\alpha^\alpha f}_{=0} = \int_\alpha^\beta f + \underbrace{\int_\beta^\alpha f}_{=-\int_\alpha^\beta f},$$

  která plyne z výše uvedeného rozšíření definice Riemannova integrálu.

  Dále předpokládejme, že $\alpha < \gamma$. Pokud $\beta = \alpha$ nebo $\beta = \gamma$, pak rovnost opět plyne přímo z rozšíření definice Riemannova integrálu.

Pokud β není roven žádnému z bodů α, γ, pak máme tři možnosti pro polohu β, ilustrovanou na následujících obrázcích.



$\beta \in (\alpha, \gamma)$ $\qquad$ $\beta > \gamma$ $\qquad$ $\beta < \alpha$

V prvním případě rovnost plyne přímo z bodu (ii) Věty VIII.3.

Ve druhém případě z bodu (ii) Věty VIII.3 plyne

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f,$$

tedy

$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f.$$

Třetí případ je zcela analogický.

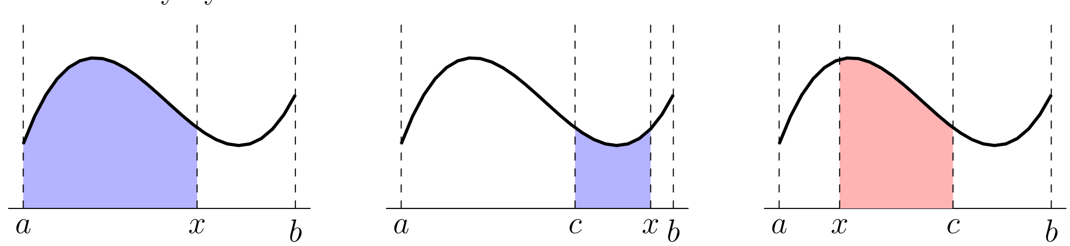
Nakonec, pokud $\alpha > \gamma$, pak lze prohodit roli γ a α, protože dokazovaná rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$\int_\gamma^\alpha f = \int_\gamma^\beta f + \int_\beta^\alpha f.$$

Tím je důkaz Lemmatu A hotov.

K Větě VIII.7:

- Geometrický význam funkce F:



případ $c = a$ $\qquad$ **případ** $x > c$ $\qquad$ **případ** $x < c$

Na prvním obrázku je ilustrován speciální případ, kdy $c = a$. Pak $F(x)$ je integrál z f přes interval $\langle a, x\rangle$, tedy obsah modře vyznačené plochy.

Další dva obrázky ilustrují případ $c \in (a, b)$. Přitom na prvním z nich je $x > c$, pak $F(x)$ je integrál z f přes interval $\langle c, x\rangle$, tedy obsah modře vyznačené plochy. Na posledním obrázku je $x < c$. Pak $F(x)$ je opačná hodnota k integrálu z f přes interval $\langle x, c\rangle$, tedy obsah červeně vyznačené plochy vynásobený číslem -1. (Poznamenejme navíc, že $F(c) = 0$.)

- Důkaz věty:

Funkce F je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. To plyne z Věty VIII.5.

Zvolme $x \in (a, b)$. Chceme dokázat, že $F'(x) = f(x)$. Připomeňme, že podle definice derivace je

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

Protože $x \in (a, b)$, bod $x+h$ patří také do (a, b), pokud h je dosti blízko nule. Pro taková h je $F(x+h)$ definováno. Protože body $c, x, x+h$ patří do $\langle a, b\rangle$, Lemma A nám dává

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f - \int_c^x f\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_c^x f + \int_x^{x+h} f - \int_c^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f. \end{aligned}$$

To znamená, že chceme dokázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x). \qquad (*)$$

Intuitivní úvaha, proč by měla platit rovnost $(*)$*:*

f je spojitá v bodě x, tedy pro y blízko x je $f(y)$ blízko $f(x)$.

Proto, je-li h malé, je na intervalu $\langle x, x+h\rangle$ f přibližně rovna $f(x)$, a tedy integrál je přibližně roven $f(x)\cdot h$.

Proto je $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$ přibližně rovno $f(x)$.

Nyní provedeme přesný důkaz na základě uvedené intuitivní úvahy.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

Protože f je spojitá v bodě x, existuje takové $\delta > 0$, že

- $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$;
- $\forall y \in (x-\delta, x+\delta) : f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$.

Nechť nyní $h \in P(0,\delta)$.

Pokud $h > 0$, pak na intervalu $\langle x, x+h\rangle$ platí

$$f(x) - \varepsilon \le f \le f(x) + \varepsilon.$$

Podle Věty VIII.3(iv) platí

$$\underbrace{\int_x^{x+h} (f(x)-\varepsilon)}_{=(f(x)-\varepsilon)\cdot h} \le \int_x^{x+h} f \le \underbrace{\int_x^{x+h} (f(x)+\varepsilon)}_{=(f(x)+\varepsilon)\cdot h},$$

kde rovnosti plynou z toho, že jde o integrály z konstantní funkce.

Po vydělení h (které je kladné), dostaneme

$$f(x) - \varepsilon \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \le f(x) + \varepsilon. \qquad (\circ)$$

Pokud $h < 0$, postupujeme podobně, ale trochu jinak. Na intervalu $\langle x+h, x\rangle$ platí

$$f(x) - \varepsilon \le f \le f(x) + \varepsilon.$$

Podle Věty VIII.3(iv) platí

$$\underbrace{\int_{x+h}^{x} (f(x)-\varepsilon)}_{=(f(x)-\varepsilon)\cdot(-h)} \le \int_{x+h}^{x} f \le \underbrace{\int_{x+h}^{x} (f(x)+\varepsilon)}_{=(f(x)+\varepsilon)\cdot(-h)},$$

kde rovnosti opět plynou z toho, že jde o integrály z konstantní funkce.

Po vydělení číslem $-h$ (které je kladné), dostaneme

$$f(x) - \varepsilon \le -\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f \le f(x) + \varepsilon,$$

neboli

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \leq f(x) + \varepsilon. \qquad (\circ\circ)$$

Nyní, z ($\circ$) a ($\circ\circ$) plyne, že

$$\forall h \in P(0, \delta) : \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \in \langle f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon \rangle.$$

To ovšem podle definice limity znamená, že platí ($*$) a že důkaz je hotov.

K definici primitivní funkce:

- Úloha hledání primitivní funkce je inverzní úloha k derivování. Máme zadanou funkci f a hledáme funkci F, jejíž derivací je funkce f.

  Této úloze se budeme důkladně věnovat na začátku Matematiky III.

- Primitivní funkce není jednoznačně určena. Pokud f je funkce definovaná na otevřeném intervalu I a F je funkce k ní na tomto intervalu primitivní, pak pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ je i funkce $F + c$ primitivní k funkci f na I. Platí totiž

  $$(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$$

  na I.

- Uvedená nejednoznačnost je jediná. Tedy, pokud F a G jsou dvě primitivní funkce k téže funkci f na otevřeném intervalu I, pak jejich rozdíl je konstantní funkce.

  Důvod je ten, že v tom případě platí

  $$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

  Tedy fukce $F - G$ má nulovou derivaci na intervalu I, proto je na I konstantní (viz Důsledek Věty IV.34).

- Předchozí úvahy jsou důvodem toho, proč primitivní funkci definujeme a hledáme na otevřeném intervalu, ne na obecnějších množinách.

Důkaz Věty VIII.8

- Nechť I je otevřený interval a f je funkce spojitá na I.

  Zvolme nějaký bod $c \in I$.

  Definujme funkci F předpisem

  $$F(x) = \int_c^x f, \qquad x \in I.$$

- Funkce F je dobře definovaná na I díky Větě VIII.5 (a rozšíření definice Riemannova integrálu).

- Pokud zvolíme $a, b \in I$ takové, že $a < c < b$, pak z Věty VIII.7 plyne, že

  $$F'(x) = f(x) \text{ pro } x \in (a, b).$$

- Z toho už plyne, že $F' = f$ na I:

  Zvolme $x \in I$ libovolné. Pak můžeme zvolit $a, b \in I$ taková, že $a < c < b$ a zároveň $a < x < b$, neboli body c a x leží v intervalu (a, b).

  Pak podle předchozího bodu máme $F'(x) = f(x)$.

  Tím je důkaz hotov.

- **Poznámka:** Věta VIII.7 a důkaz Věty VIII.8 je důvodem, proč se primitivní funkci někdy říká neurčitý integrál. Dá se totiž vyjádřit jako integrál s proměnnou horní mezí.

Aplikace Věty VIII.8 na důkaz Věty IV.23:

- V Matematice I jsme zformulovali Větu IV.23 o zavedení logaritmu, kterou jsme nedokazovali, ale dále používali.

  Nyní ji můžeme dokázat.

  Věta IV.23 říká, že existuje právě jedna funkce s uvedenými vlastnostmi. Dokázat ji znamená, ukázat, že taková funkce existuje a že neexistují dvě různé takové funkce.

- Nejprve si rozmyslíme, že jednoznačnost jsme už vlastně dokázali:

  Nechť F a G jsou dvě funkce, které splňují vlastnosti (L1), (L2) a (L3).

  Z Věty IV.24 (L9) plyne, že

$$F'(x) = G'(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \in (0, +\infty),$$

  tedy

$$(F - G)' = 0 \text{ na intervalu } (0, +\infty),$$

  proto je funkce $F - G$ konstantní.

  Přitom podle Věty IV.26(L5) je $F(1) = G(1) = 0$, tedy $(F-G)(1) = 0$.

  Proto je funkce $F - G$ nulová, neboli $F = G$.

- Dále dokažme existenci.

  Funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá na $(0, +\infty)$, podle Věty VIII.8 k ní tedy existuje primitivní funkce.

  Vezměme nějakou primitivní funkci L_0 a položme

$$L(x) = L_0(x) = L_0(1) \text{ pro } x \in (0, +\infty).$$

  Pak platí

$$L(1) = 0 \quad \text{ a } \quad L'(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \in (0, +\infty).$$

  Ukážeme, že L splňuje vlastnosti (L1), (L2) a (L3):

  (L1): Definiční obor L je zřejmě $(0, +\infty)$. Navíc, protože $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pro $x \in (0, +\infty)$, je L rostoucí na $(0, +\infty)$.

  (L3): Protože $L(1) = 0$, platí

$$\lim_{x \to 1} \frac{L(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{L(x) - L(1)}{x - 1} = L'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

  (L2): Ukážeme, že pro každé $x, y \in (0, +\infty)$ platí $L(xy) = L(x) + L(y)$. Zvolme $y \in (0, +\infty)$ libovolné a uvažme funkci

$$g(x) = L(xy) - L(x) - L(y), \quad x \in (0, +\infty).$$

Pak pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí

$$g'(x) = L'(xy) \cdot y - L'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

tedy funkce g je konstantní na $(0, +\infty)$.
Protože

$$g(1) = L(1 \cdot y) - L(1) - L(y) = 0,$$

je g nulová na $(0, +\infty)$.
Zbývá si uvědomit, že to je přesně to, co jsme potřebovali dokázat.

K Větě VIII.9:

- Vzorec obsažený v této větě se nazývá Newton-Leibnizova formule.

  Tato věta se někdy nazývá „základní věta analýzy“.

  Dává totiž do souvislosti primitivní funkci a Riemannův integrál. Je základní početní metodou, jak spočítat Riemannův integrál.

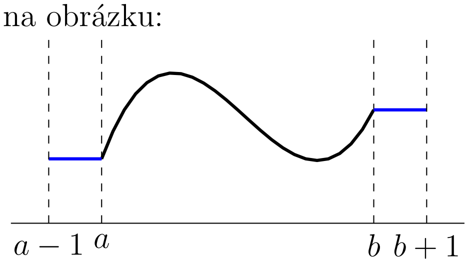
  K tomu samozřejmě je potřeba umět počítat primitivní funkce. To se naučíme v Matematice III. (Ale leccos umíme už teď, protože umíme derivovat.)

- Důkaz:

  - Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je nějaká primitivní funkce k F na (a, b).
  - Definujme si pomocnou funkci g na intervalu $(a-1, b+1)$ vzorcem:

    $$g(x) = \begin{cases} f(a), & x \in (a-1, a), \\ f(x), & x \in \langle a, b\rangle, \\ f(b), & x \in (b, b+1). \end{cases}$$

    Tedy funkci f prodloužíme o dva konstantní úseky, jak je znázorněno na obrázku:



- Funkce g je spojitá na intervalu $(a-1, b+1)$.

  označme
  $$G(x) = \int_a^x g, \qquad x \in (a-1, b+1).$$
  Pak $G' = g$, neboli G je primitivní funkcí ke g na $(a-1, b+1)$ (viz Věta VIII.8 a její důkaz).

  Z definice funkce G plyne, že
  $$G(b) = G(b) - G(a) = \int_a^b g = \int_a^b f \qquad (\triangle).$$

- Protože na intervalu (a, b) máme nyní dvě primitivní funkce k f – F a G, musí být jejich rozdíl konstantní. Tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující
  $$F(x) = G(x) + c \text{ pro } x \in (a, b).$$
  Pak ovšem
  $$\lim_{x \to a_+} F(x) = \lim_{x \to a_+} G(x) + c = G(a) + c = c,$$
  $$\lim_{x \to b_-} F(x) = \lim_{x \to b_-} G(x) + c = G(b) + c,$$
  a tedy
  $$(\lim_{x \to b_-} F(x)) - (\lim_{x \to a_+} F(x)) = G(b) \overset{(\triangle)}{=} \int_a^b f$$
  a důkaz je hotov.

- Poznámka: Předchozí důkaz je poněkud trikový. Lze postupovat i trochu jinak:

  Definujme
  $$G(x) = \int_a^x f, \qquad x \in \langle a, b \rangle.$$
  Podle Věty VIII.7 platí $G'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$, tedy G a F se liší o konstantu. Proto existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující
  $$F(x) = G(x) + c \text{ pro } x \in (a, b).$$
  K tomu, abychom mohli provést závěrečný výpočet stejně jako v předchozím postupu, potřebujeme vědět, že G je spojitá na $\langle a, b \rangle$.

K tomu využijeme fakt, že f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ (Věta IV.19). Existuje tedy takové $M > 0$, že $|f| \leq M$ na $\langle a, b \rangle$. Pak pro $x \in (a, b)$ platí

$$|G(x)| = \left| \int_a^x f \right| \overset{\text{Věta VIII.3(v)}}{\leq} \int_a^x |f| \overset{\text{Věta VIII.3(iv)}}{\leq} \int_a^x M$$
$$= M(x - a) \xrightarrow{x \to a+} 0,$$

a tedy $\lim_{x \to a+} G(x) = 0 = G(a)$.

Podobně

$$|G(x) - G(b)| = \left| \int_x^b f \right| \overset{\text{Věta VIII.3(v)}}{\leq} \int_x^b |f| \overset{\text{Věta VIII.3(iv)}}{\leq} \int_x^b M$$
$$= M(b - x) \xrightarrow{x \to b-} 0,$$

a tedy $\lim_{x \to b-} G(x) = G(b)$.