K oddílu VIII.1 – pokračování: vlastnosti Riemannova integrálu

K významu této části:

- V předchozí části jsme si definovali Riemannův integrál.

  Definice to byla přirozená a v jistém smyslu intuitivní, ale nepříliš použitelná pro praktické výpočty.

  K praktickým výpočtům se přiblížíme v oddílu VIII.2. Dvě tvrzení zbývající v tomto oddílu slouží zejména jako příprava na to.

- Větička VIII.2 nám umožní poznat, zda funkce má Riemannův integrál, aniž bychom museli zkoumat *všechna* dělení intervalu.

- Věta VIII.3 shrnuje několik základních vlastností Riemannova integrálu a několik základních početních pravidel.

- Důkaz obou tvrzení provedeme s využitím definic a pečlivé práce se supremy a infimy.

K Větičce VIII.2:

- Důkaz bodu (i):

  $\Rightarrow$: Nechť $I = \int_a^b f$ a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, jak najít dělení D.

  Podle definice Riemannova integrálu víme, že $I = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b f}$.

  Tedy jednak I je infimum množiny všech horních součtů. Protože $I + \varepsilon > I$, z definice infima plyne, že existuje dělení D_1, pro které platí

  $$\overline{S}(f, D_1) < I + \varepsilon. \qquad (*)$$

  Zároveň je I supremum množiny všech dolních součtů. Protože $I - \varepsilon < I$, z definice suprema plyne, že existuje dělení D_2, pro které platí

  $$\underline{S}(f, D_2) > I - \varepsilon. \qquad (**)$$

  Nechť D je společné zjemnění D_1 a D_2 (viz Větička VIII.1(1)). Pak platí

  $$I - \varepsilon \overset{(**)}{<} \underbrace{\underline{S}(f, D_2) \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1)}_{\text{podle Větičky VIII.3(2)}} \overset{(*)}{<} I + \varepsilon.$$

Tedy D je dělení, které má požadované vlastnosti a důkaz je hotov.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že I má uvedenou vlastnost, a ukažme, že $I = \int_a^b f$.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.

Podle předpokladu existuje dělení D, které splňuje

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Pak platí

$$\underline{\int_a^b} f \geq \underline{S}(f, D) > I - \varepsilon \qquad (\circ)$$

a

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon, \qquad (\circ\circ)$$

kde jsme použili skutečnost, že $\underline{S}(f, D)$ je supremum (a tedy horní závora) množiny všech dolních součtů a $\overline{S}(f, D)$ je infimum (a tedy dolní závora) množiny všech horních součtů.

Kombinací ($\circ$), ($\circ\circ$) a Větičky VIII.1(4) dostáváme

$$I - \varepsilon < \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f < I + \varepsilon.$$

Tedy

$$\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon),$$

neboli

$$\left| \underline{\int_a^b} f - I \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \left| \overline{\int_a^b} f - I \right| < \varepsilon$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, uvedené nerovnosti platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy

$$\left| \underline{\int_a^b} f - I \right| = 0 \quad \text{a} \quad \left| \overline{\int_a^b} f - I \right| = 0,$$

neboli

$$I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

To ovšem podle definice znamená, že

$$I = \int_a^b f$$

a důkaz je hotov.

- Rozdíl mezi body (i) a (ii): Zatímco bod (i) říká, jak poznáme, že dané číslo je Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$, bod (ii) říká, jak poznáme, že funkce má Riemannův integrál, i když neznáme jeho hodnotu.

  Uvidíme také později, že se tyto dva body budou používat v odlišných situacích.

- Důkaz bodu (ii):

  $\Rightarrow$: Předpokládejme, že f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Ukážeme, jak najít dělení D s požadovanou vlastností.

  Označme si $I = \int_a^b f$. Podle již dokázaného bodu (i) (aplikovaného na $\frac{\varepsilon}{2}$) existuje dělení D, pro které

  $$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Tedy

  $$\underline{S}(f, D), \overline{S}(f, D) \in (I - \tfrac{\varepsilon}{2}, I + \tfrac{\varepsilon}{2}),$$

  a proto

  $$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon,$$

  protože rozdíl dvou prvků otevřeného intervalu délky ε je menší než ε.

  Tím je důkaz hotov.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že platí uvedená podmínka a dokažme, že f má Riemannův integrál.

To znamená, že chceme dokázat, že horní a dolní Riemannův integrál se rovnají.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.

Podle předpokladu existuje dělené D, pro které platí

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Protože platí

$$\underline{S}(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,D),$$

dostáváme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí nerovnost

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Tedy

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 0,$$

neboli

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

což jsme chtěli dokázat.

K Větě VIII.3

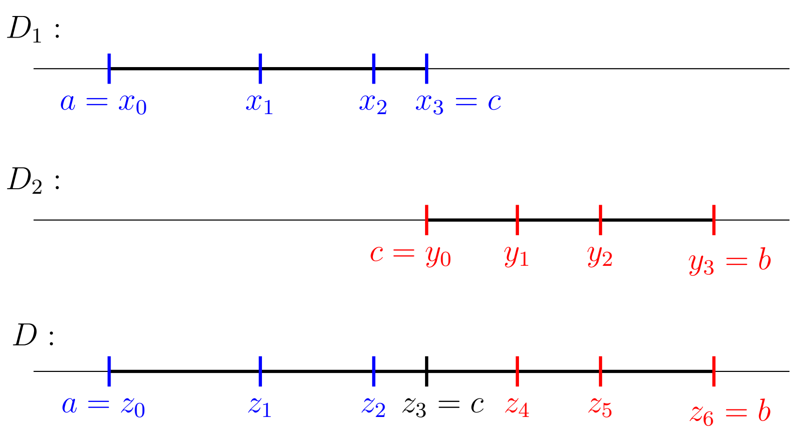
- Důkaz bodu (ii): Použijeme bod (i) z Větičky VIII.2.

  Označme
$$I = \int_a^c f \quad \text{and} \quad J = \int_c^b f.$$
  Podle předpokladu tyto integrály existují.

  Pomocí bodu (i) z Větičky VIII.2 ukážeme, že
$$I + J = \int_a^b f.$$

  Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.

  Podle Větičky VIII.2(i) existuje D_1, dělení intervalu $\langle a, c\rangle$, pro které platí
$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S(f, D_1)} \le \overline{S(f, D_1)} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$\triangle$}$$
  Podle Větičky VIII.2(i) dále existuje D_2, dělení intervalu $\langle c, b\rangle$, pro které platí
$$J - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S(f, D_2)} \le \overline{S(f, D_2)} < J + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{∇}$$
  Nyní z dělení D_1 intervalu $\langle a, c\rangle$ a z dělení D_2 intervalu $\langle c, b\rangle$ vytvoříme dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že použijeme dělící body obou dělení:



Nyní je zřejmé, že

$$\overline{S}(f,D)=\overline{S}(f,D_1)+\overline{S}(f,D_2) \quad \text{a} \quad \underline{S}(f,D)=\underline{S}(f,D_1)+\underline{S}(f,D_2).$$

(Proč je to zřejmé: Podívejme se třeba na druhou rovnost. Dolní součet je roven součtu obsahů největších obdélníků, které se vejdou pod graf f na jednotlivých dělících intervalech. Stačí si uvědomit, že dělící intervaly dělení D jsou jednak dělící intervaly dělení D_1 a jednak dělící intervaly dělení D_2.)

S použitím těchto rovností a nerovností ($\triangle$) a (∇) dostaneme

$$\begin{aligned} I+J-\varepsilon &< \underline{S}(f,D_1)+\underline{S}(f,D_2)=\underline{S}(f,D) \\ &\le \overline{S}(f,D)=\overline{S}(f,D_1)+\overline{S}(f,D_2)<I+J+\varepsilon. \end{aligned}$$

To ovšem podle Větičky VIII.2(i) znamená, že $I+J=\int_a^b f$ a důkaz je hotov.

- Důkaz bodu (i):

  Použijeme bod (ii) z Větičky VIII.2:

  Nechť $\varepsilon>0$ je libovolné.

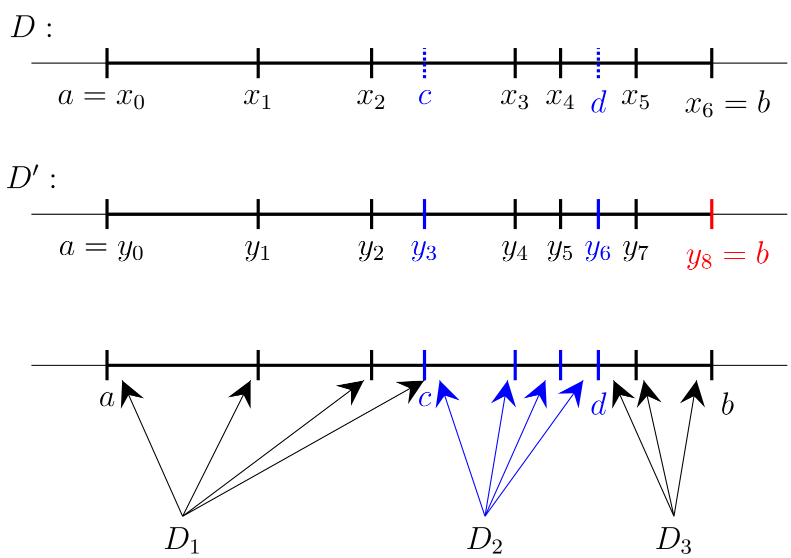
  Podle Větičky VIII.2(ii) existuje D dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které platí
  $$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<\varepsilon. \qquad (\square)$$

  Nechť D' je zjemnění dělení D, které vznikne tak, že mezi dělící body přidáme body c,d.

  Podle Větičky VIII.1(2) platí
  $$\underline{S}(f,D)\le\underline{S}(f,D')\le\overline{S}(f,D')\le\overline{S}(f,D'),$$
  a tedy díky ($\square$) dostaneme
  $$\overline{S}(f,D')-\underline{S}(f,D')<\varepsilon. \qquad (\boxminus)$$

  Nyní si dělení D' můžeme rozdělit na tři dělení – dělení D_1 intervalu $\langle a,c\rangle$, dělení D_2 intervalu $\langle c,d\rangle$ a dělení D_3 intervalu $\langle d,b\rangle$.

Tento proces ilustruje obrázek:



Nyní je zřejmé, že

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D') &= \overline{S}(f, D_1) + \overline{S}(f, D_2) + \overline{S}(f, D_3),\\ \underline{S}(f, D') &= \underline{S}(f, D_1) + \underline{S}(f, D_2) + \underline{S}(f, D_3).\end{aligned}$$

(To už jsme použili v důkazu bodu (ii).)

Tedy máme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D') &= \overline{S}(f, D_1) + \overline{S}(f, D_2) + \overline{S}(f, D_3)\\ &\qquad - \left(\underline{S}(f, D_1) + \underline{S}(f, D_2) + \underline{S}(f, D_3)\right)\\ &= \underbrace{\overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_1)}_{\geq 0} + \overline{S}(f, D_2) - \underline{S}(f, D_2)\\ &\qquad + \underbrace{\overline{S}(f, D_3) - \underline{S}(f, D_3)}_{\geq 0}\\ &\geq \overline{S}(f, D_2) - \underline{S}(f, D_2).\end{aligned}$$

Odsud a z ($\boxminus$) nyní plyne, že

$$\overline{S}(f, D_2) - \underline{S}(f, D_2) < \varepsilon. \qquad (\boxplus)$$

Nyní shrňme, co jsme dokázali: Pro každé $\varepsilon > 0$ jsme našli dělení D_2 intervalu $\langle c, d\rangle$ splňující ($\boxplus$).

Díky Větičce VIII.2(ii) to znamená, že $\int_c^d f$ existuje, což jsme chtěli dokázat.

- Důkaz bodu (iii) pro násobek:

  Předpokládáme tedy, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Označme $I = \int_a^b f$. Ukážeme, že $\int_a^b \alpha f = \alpha I$.

$\alpha = 0$: Pokud $\alpha = 0$, pak $\alpha f = 0$, je to konstantní nulová funkce, a tedy

$$\int_a^b 0 \cdot f = \int_a^b 0 = 0 = 0 \cdot I.$$

$\alpha > 0$: Předpokládejme, že $\alpha > 0$.
Nechť $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \sup\,(\alpha f)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &= \alpha \cdot \sup f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle), \\ \inf\,(\alpha f)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &= \alpha \cdot \inf f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle). \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

(To snadno plyne z toho, že supremum je nejmenší horní závora, infimum největší dolní závora a že násobení kladným číslem α zachovává nerovnosti.)
Z rovností ($\clubsuit$) nyní (sečtením přes j) dostaneme

$$\overline{S}(\alpha f, D) = \alpha \overline{S}(f, D) \quad \text{a} \quad \underline{S}(\alpha f, D) = \alpha \underline{S}(f, D). \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

Nyní můžeme důkaz dokončit pomocí tvrzení (i) z Větičky VIII.2: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pode Větičky VIII.2(i) existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které

$$I - \frac{\varepsilon}{\alpha} < \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < I + \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Pokud tyto nerovnosti vynásobíme α, dostaneme

$$\alpha I - \varepsilon < \alpha \underline{S}(f, D) \le \alpha \overline{S}(f, D) < \alpha I + \varepsilon,$$

což díky ($\clubsuit\clubsuit$) je totéž jako

$$\alpha I - \varepsilon < \underline{S}(\alpha f, D) \le \overline{S}(\alpha f, D) < \alpha I + \varepsilon.$$

Opětovným použitím Větičky VIII.2(i) dostaneme, že $\int_a^b \alpha f = \alpha I$, což je přesně to, co jsme chtěli.

$\alpha = -1$: Ukážeme, že $\int_a^b(-f) = -I$.

Postupujeme podobně, jako v předchozím bodě:

Nechť $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \sup\,(-f)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &= -\inf f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle), \\ \inf\,(-f)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &= -\sup f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle). \end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

(To snadno plyne z toho, že supremum je nejmenší horní závora, infimum největší dolní závora a že násobení -1 obrací nerovnosti; tento postup jsme použili již v důkazu Věty I.6.)

Z rovností ($\diamond$) nyní (sečtením přes j) dostaneme

$$\overline{S}(-f, D) = -\underline{S}(f, D) \quad \text{a} \quad \underline{S}(-f, D) = -\overline{S}(f, D). \tag{$\diamond\diamond$}$$

Nyní můžeme důkaz dokončit pomocí tvrzení (i) z Větičky VIII.2:

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pode Větičky VIII.2(i) existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Pokud tyto nerovnosti vynásobíme -1, dostaneme

$$-I + \varepsilon > -\underline{S}(f, D) \geq -\overline{S}(f, D) < -I - \varepsilon,$$

což díky ($\diamond\diamond$) je totéž jako

$$-I - \varepsilon < \underline{S}(-f, D) \leq \overline{S}(-f, D) < -I + \varepsilon.$$

Opětovným použitím Větičky VIII.2(i) dostaneme $\int_a^b \alpha f = -I$, což jsme chtěli.

$\alpha < 0$: Tento případ dostaneme kombinací předchozích.

Máme totiž

$$\begin{aligned} \int_a^b f = I \overset{\text{předchozí bod}}{\Longrightarrow} & \int_a^b (-f) = -I \\ & \overset{-\alpha > 0}{\Longrightarrow} \int_a^b \alpha f = \int_a^b (-\alpha)(-f) = (-\alpha)(-I) = \alpha I. \end{aligned}$$

- Důkaz bodu (iii) pro součet:

  Předpokládejme, že f a g mají Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$ a označme $I = \int_a^b f$ a $J = \int_a^b g$. Ukážeme, že $\int_a^b (f+g) = I + J$.

  Nejprve se opět podívejme na chování horních a dolních součtů.

  Nechť $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \sup\,(f+g)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &\le \sup f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) + \sup g(\langle x_{j-1}, x_j\rangle), \\ \inf\,(f+g)(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) &\ge \inf f(\langle x_{j-1}, x_j\rangle) + \inf g(\langle x_{j-1}, x_j\rangle). \end{aligned} \tag{$\spadesuit$}$$

  (První nerovnost platí, protože výraz na pravé straně je horní závorou pro funkci $f + g$ na intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ a supremum je nejmenší horní závora. Podobně, druhá nerovnost platí, protože výraz na pravé straně je dolní závorou pro funkci $f + g$ na intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ a infimum je největší dolní závora.)

  Z nerovností ($\spadesuit$) nyní (sečtením přes j) dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f+g, D) &\le \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D), \\ \underline{S}(f+g, D) &\ge \underline{S}(f, D) + \underline{S}(f, D). \end{aligned} \tag{$\spadesuit\spadesuit$}$$

  Nyní můžeme důkaz dokončit pomocí tvrzení (i) z Větičky VIII.2:

  Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pode Větičky VIII.2(i) existují dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$, pro která platí

$$\begin{aligned} I - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \\ J - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}(g, D_2) \le \overline{S}(g, D_2) < J + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

  Nechť D je společné zjemnění D_1 a D_2 (Větička VIII.1(1)). Pak z předchozích nerovností a Větičky VIII.1(2) plyne

$$\begin{aligned} I - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \\ J - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}(g, D) \le \overline{S}(g, D) < J + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

  Sečtením těchto dvou nerovností dostaneme

$$I + J - \varepsilon < \underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \le \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D) < I + J + \varepsilon.$$

Pomocí (♠♠) z těchto nerovností plyne

$$I + J - \varepsilon < \underline{S}(f+g, D) \leq \overline{S}(f+g, D) < I + J + \varepsilon.$$

Opětovným použitím Větičky VIII.2(i) dostaneme $\int_a^b (f+g) = I + J$ a důkaz je hotov.

- Důkaz bodu (iv):

  Předpokládejme, že $f \geq g$ na $\langle a, b \rangle$.

  Pak pro každý interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$ platí

$$\sup f(\langle \alpha, \beta \rangle) \geq \sup g(\langle \alpha, \beta \rangle).$$

Z definice horních součtů tedy plyne, že pro každé dělení D platí

$$\overline{S}(f, D) \geq \overline{S}(g, D).$$

Protože $\overline{S}(g, D) \geq \overline{\int_a^b} g$, dostáváme,

$$\forall D \text{ dělení:} \quad \overline{S}(f, D) \geq \overline{\int_a^b} g,$$

tedy $\overline{\int_a^b} g$ je dolní závora množiny všech horních součtů funkce f. Proto

$$\overline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} g$$

($\overline{\int_a^b} f$ je infimum, tedy největší dolní závora.)

Protože ovšem předpokládáme, že f i g mají Riemannův integrál přes $\langle a, b \rangle$, říká tato nerovnost, že

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g,$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

- Důkaz bodu (v) – první část, tj. existence Riemannova integrálu z $|f|$.

  Předpokládejme, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$, a ukažme, že i $|f|$ má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$.

  Použijeme k tomu Větičku VIII.2(ii).

  Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

  Protože f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$, podle Větičky VIII.2(ii) existuje D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, splňující

  $$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

  Nechť dělící body D jsou $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

  Z definice horních a dolních součtů plyne, že

  $$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad (\heartsuit)$$

  kde

  $$M_i = \sup f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \quad \text{a} \quad m_i = \inf f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle).$$

  Porovnejme nyní chování f a $|f|$ na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pro každé $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí

  $$m_i \leq f(x) \leq M_i.$$

  Rozlišíme tři případy:

  $m_i \geq 0$: Pak na $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí $f \geq 0$, a tedy $|f| = f$. Proto

  $$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = M_i \quad \text{a} \quad \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = m_i,$$

  a tedy

  $$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) - \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = M_i - m_i.$$

  $M_i \leq 0$: Pak na $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí $f \leq 0$, a tedy $|f| = -f$. Proto

  $$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = -m_i \quad \text{a} \quad \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = -M_i$$

  (viz ($\diamond$) výše). Tedy

  $$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) - \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) = -m_i - (-M_i) = M_i - m_i.$$

$m_i < 0 < M_i$**:** V tomto případě pro každé $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platí

$$0 \leq |f(x)| \leq \max\{M_i, -m_i\},$$

a tedy

$$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) - \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \leq \max\{M_i, -m_i\} - 0 \leq M_i - m_i$$

(kde poslední nerovnost plyne z toho, že $M_i > 0$ i $-m_i > 0$).

Ve všech třech případech jsme dokázali, že

$$\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) - \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \leq M_i - m_i. \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

S použitím ($\heartsuit$) pro f i $|f|$ nyní dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) &= \sum_{i=1}^{n} (\sup |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) - \inf |f|(\langle x_{i-1}, x_i \rangle)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\overset{(\heartsuit\heartsuit)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Opětovným použitím Větičky VIII.2(ii) dostaneme, že $|f|$ má Riemannův integrál přes $\langle a, b \rangle$, což bylo naším cílem.

- Důkaz bodu (v) – druhá část, tj. nerovnost.

  Podle první části již víme, že $\int_a^b |f|$ existuje.

  Protože na $\langle a, b \rangle$ platí $-|f| \leq f \leq |f|$, z bodu (iv) plyne

  $$\int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

  Apliklací bodu (iii) na levou stranu dostaneme nerovnosti

  $$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

  což znamená totéž, co

  $$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

  Tím je důkaz hotov.

- **O významu této věty:** Tato věta shrnuje několik základních vlastností.

  Bod (ii) se nazývá „aditivita Riemannova integrálu jako funkce intervalu". Význam je názorný – pokud známe obsah plochy pod grafem na sousedních intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$, pak obsah plochy pod grafem na intervalu $\langle a, b\rangle$ je součtem těchto dvou obsahů.

  Bod (iii) se nazývá „linearita Riemannova integrálu". Významu linearity se budeme věnovat více ještě v Matematice III.

  Body (ii) a (iii) se hodí i v praktickém počítání integrálů, jak uvidíme později.

  Bod (iv) se nazývá „monotonie Riemannova integrálu". Říká, že „integrál z větší funkce je větší". Speciálně říká, že integrál z nezáporné funkce je nezáporný. Nepoužívá se ani tak při výpočtech integrálů, ale k jejich odhadům v aplikacích.

  Speciálně bod (iv) dává následující: Předpokládejme, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$. Označme $m = \inf f(\langle a, b\rangle)$ a $M = \sup f(\langle a, b\rangle)$. Pak
  $$m \le f \le M$$
  na $\langle a, b\rangle$, tedy
  $$\int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M,$$
  neboli
  $$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a),$$
  nebo též
  $$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M.$$

  Bod (v) se někdy vyjadřuje slovy, že „Riemannův integrál je absolutně konvergentní". Tedy, že z existence integrálu z funkce plyne existence integrálu z její absolutní hodnoty.