K oddílu VII.4 – absolutně konvergentní řady

Význam tohoto oddílu:

- V oddílech VII.2 a VII.3 jsme se věnovali kritériím konvergence řad. To jsou věty, které nám pomohou zjistit, zda zadaná řada je či není konvergentní, případně absolutně konvergentní.

  Věty z tohoto oddílu k řešení konkrétních příkladů nepoužijeme. Jsou však významné z teoretického hlediska.

- Ukážeme si totiž, že absolutně konvergentní řady mají některé speciální užitečné vlastnosti.

  Kromě lepšího pochopení fenoménu absolutní konvergence nám to umožní s takovými řadami pracovat tam, kde se používají. (Například se s tím setkáme v Matematice III.)

K Větičce VI.10:

- Vztah řad $\sum_n a_n$ a $\sum_k b_k$:

  Zapíšeme-li řadu $\sum_n a_n$ jako
  $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$
  pak řada $\sum_k b_k$ je jejím „uzávorkováním“:
  $$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_2-1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_2} + \dots + a_{n_3-1})}_{b_2} + \underbrace{(a_{n_3} + \dots + a_{n_4-1})}_{b_3} + \dots$$

- Úvod k důkazu a pomocné značení:

  Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_n a_n$ a $\{t_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_k b_k$.

  Pak platí
  $$\begin{aligned} t_1 &= b_1 = s_{n_2-1}, \\ t_2 &= t_1 + b_2 = s_{n_2-1} + b_2 = s_{n_3-1}, \\ t_3 &= t_2 + b_3 = s_{n_3-1} + b_3 = s_{n_4-1}, \\ &\vdots \\ t_m &= t_{m-1} + b_m = s_{n_m-1} + b_m = s_{n_{m+1}-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tedy
$$\forall m \in \mathbb{N} : t_m = s_{n_{m+1}-1}.$$
(Tento vzorec se snadno dokáže matematickou indukcí, jak je naznačeno výše.)

Nyní si uvědomme, že posloupnost $\{n_{m+1} - 1\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Tedy posloupnost $\{t_m\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{s_m\}$.

- Důkaz bodu (i) plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti:

  $$\sum_n a_n = s \Longrightarrow \lim s_m = s$$

  $$\overset{\text{limita vybrané posl.}}{\Longrightarrow} \quad \lim t_m = s \Longrightarrow \sum_k b_k = s.$$

- Důkaz bodu (ii): Pokud jsou všechna čísla a_n nezáporná, pak je posloupnost $\{s_m\}$ neklesající, a tedy má limitu.

  Posloupnost $\{t_m\}$, která je vybraná z $\{s_m\}$, má (podle věty o limitě vybrané posloupnosti) stejnou limitu.

- V bodě (i) obrácená implikace neplatí, protože z toho, že vybraná posloupnost má nějakou limitu, neplyne, že původní posloupnost má též limitu.

  Ilustrují to příklady 3 a 9 z oddílu VII.1:

  Řada z příkladu 3, tj.

  $$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

  nemá součet. Pokud ji uzávorkujeme způsobem

  $$(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots,$$

  bude mít takto uzávorkovaná řada součet 0 (to odpovídá tomu, že $\lim s_{2m} = 0$).

  Pokud řadu uzávorkujeme jinak, a to

  $$(-1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

bude mít takto uzávorkovaná řada součet -1 (to odpovídá tomu, že $\lim s_{2m-1} = -1$).

Pro řadu z příkladu 9 je to podobné – při jednom uzávorkování má výsledná řada součet 0, při jiném uzávorkování vyjde součet $+\infty$. (Řada sama tedy součet nemá.)

Přerovnání řady:

- Význam pojmu přerovnání:

  Jedna řada je přerovnáním druhé řady, pokud „má stejné členy, ale (možná) v jiném pořadí“.

  Připomeňme příklady, které už jsme viděli v oddílu VII.1:

  Řada z příkladu 7 je přerovnáním řady z příkladu 3. Příslušná posloupnost $\{k_n\}$ je (například)

  $$2, 4, 1, 6, 8, 3, 10, 12, 5, 14, 16, 7, \dots$$

  Stejně tak řada z příkladu 3 je přerovnáním řady z příkladu 7. Příslušná posloupnost $\{k_n\}$ je (například)

  $$3, 1, 6, 2, 9, 4, 12, 5, 15, 7, 18, \dots$$

  (Modře jsou v obou případech vyznačeny členy, které mají hodnotu -1 a červeně členy, které mají hodnotu 1.)

  Dále, řady z příkladů 8 a 9 jsou přerovnáním řady z příkladu 6. Příslušné posloupnosti $\{k_n\}$ jsou

  $$1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 9, 11, 13, 15, 8, 17, 19, \dots, 31, 10, \dots$$

  pro příklad 8 a

  $$1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, \dots, 31, 18, 20, \dots, 32, \dots$$

  (Modře jsou v obou případech vyznačeny bloky záporných členů a červeně bloky kladných členů.)

- Jiná formulace přerovnání:

  To, že posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje každé přirozené číslo právě jednou, lze ekvivalentně vyjádřit tak, že

  $$n \mapsto k_n \text{ je prosté zobrazení množiny } \mathbb{N} \text{ na množinu } \mathbb{N}.$$

  To, že řada $\sum_n b_n$ je přerovnáním řady $\sum_n a_n$, lze tedy ekvivalentě popsat tak, že

  $$\text{existuje } g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ prosté a na, že pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } b_n = a_{g(n)}.$$

- Každá řada je přerovnáním sebe sama. Za posloupnost $\{k_n\}$ lze totiž vzít i $\{n\}$, neboli lze vzít (identické) zobrazení $g(n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

- Je-li řada $\sum_n b_n$ přerovnáním řady $\sum_n a_n$, je i řada $\sum_n a_n$ přerovnáním řady $\sum_n b_n$.

  Toto je intuitivně jasné – pokud má řada $\sum_n b_n$ stejné členy jako $\sum_n a_n$, jen jinak seřazené; pak to lze formulovat i obráceně, tj. řada $\sum_n a_n$ stejné členy jako $\sum_n b_n$, jen jinak seřazené.

  Přesné vysvětlení je nesnazší s použitím uvedené formulace pomocí zobrazení g:

  To, že $\sum_n b_n$ je přerovnáním řady $\sum_n a_n$ znamená, že existuje zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je prosté a na a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

  $$b_n = a_{g(n)}. \tag{$*$}$$

  Nyní stačí uvážit inverzní zobrazení g^{-1}. Pak totiž g^{-1} je prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

  $$a_n = a_{g(g^{-1}(n))} = b_{g^{-1}(n)},$$

  kde první rovnost plyne z toho, že g^{-1} je inverzní zobrazení ke g, a druhá rovnosti plyne z $(*)$.

K Větě VII.11:

- Význam věty:

  Z příkladů v oddílu VII.1 víme, že přerovnání řady může ovlivnit její konvergenci a součet.

Například řada z příkladu 3 nemá součet a její přerovnání z příkladu 7 má součet $+\infty$. (V následující poznámce je popsáno jiné přerovnání, tentokrát se součtem $-\infty$.)

Nebo řada z příkladu 6 konverguje a má součet 0. Její přerovnání v příkladu 8 má součet $+\infty$, zatímco přerovnání v příkladu 9 nemá součet.

Věta VII.11 říká, že pro absolutně konvergentní řady je to jinak – v tom případě konvergence ani součet nezávisí na přerovnání.

- Důkaz pro řady s nezápornými členy:

  Úvodní úvahy a značení:

  Nechť $\sum_n a_n$ je řada s nezápornými členy a $\sum_n a_{k_n}$ je její přerovnání. Obě řady mají nezáporné členy, a tedy obě mají součet (příslušné posloupnosti částečných součtů jsou neklesající). Ukážeme, že mají stejný součet.

  Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_n a_n$ a s součet této řady. Tj.,

  $$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m \quad \text{a} \quad s = \lim_m s_m.$$

  Dále označme $\{t_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_n a_{k_n}$ a t součet této řady. Tj.,

  $$t_m = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_m} \quad \text{a} \quad t = \lim_m t_m.$$

  Ukážeme, že $t \leq s$:

  Protože $t = \lim_m t_m$, stačí k tomu ukázat, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $t_m \leq s$ (díky větě o limitě a uspořádání).

  Zvolme tedy libovolné $m \in \mathbb{N}$ a označme

  $$N = \max\{n_1, \dots, n_m\}.$$

  Pak

  $$t_m = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_m} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N = s_N \leq s.$$

  První nerovnost plyne z toho, že členy jsou nezáporné a všechny sčítance z levé strany se vyskytují i na pravé straně (N je největší z čísel $k_1, \dots, k_m$).

Poslední nerovnost plyne z toho, že $s = \lim_m s_m$ a posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající.

Dokázali jsme tedy, že s je horní závora posloupnosti $\{t_m\}$, a tedy $t \leq s$.

Opačná nerovnost:

Ukázali jsme vlastně následující tvrzení:

Nechť $\sum_n a_n$ je řada s nezápornými členy a s je její součet. Pak každé její přerovnání má součet $\leq s$.

Nyní si uvědomme, že řada $\sum_n a_n$ je přerovnáním řady $\sum_n a_{k_n}$ (což jsme si vysvětlili výše). Použitím dokázanéno tvrzení na řadu $\sum_n a_{k_n}$ a její přerovnání $\sum_n a_n$ dostaneme $s \leq t$.

Tedy $s = t$ a důkaz je hotov.

- *Ještě jeden pohled na řady s nezápornými členy (pro zájemce o hlubší pochopení):*

  Mějme řadu $\sum_n a_n$ s nezápornými členy a označme s její součet.

  Pak platí

$$s = \lim_{m\to\infty} (a_1 + \cdots + a_m) = \sup\{a_1 + \cdots + a_m; m \in \mathbb{N}\}. \qquad (**)$$

  První rovnost plyne z definice součtu řady, druhá pak z toho, že posloupnost částečných součtů je neklesající a z podrobnější verze věty o limitě monotónní posloupnosti.

  (Správně bychom měli rozlišit případ, kdy posloupnost je shora omezená [pak limita je rovna supremu] a kdy není shora omezená [pak limita je $+\infty$]. Ale pro tuto chvíli předpokládejme, že supremum shora neomezené množiny je $+\infty$. Tato konvence se někdy též používá [pak supremum je nejmenší horní závora v $\mathbb{R}^*$] a nyní nám zjednoduší zápis.)

  Součet s lze alternativně vyjádřit vzorcem

$$s = \sup\left\{\sum_{n\in F} a_n; \quad F \subset \mathbb{N} \textit{ konečná}\right\}. \qquad (***)$$

Důkaz nerovnosti $\leq$: *s je rovno supremu množiny z $(**)$. Přitom tato množina je podmnožinou množiny z $(***)$, protože*

$$a_1 + \cdots + a_m = \sum_{n\in F} a_n, \quad \textit{kde} \quad F = \{1, \ldots, m\}.$$

Tedy s je rovno supremu jisté podmnožiny množiny z $(***)$, proto zřejmě platí nerovnost „$\leq$“.

Důkaz nerovnosti $\geq$: *Ukážeme, že s je horní závorou množiny na pravé straně $(***)$.*

Vezměme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$. Nechť $m = \max F$ (tj. m je největší prvek množiny F). Pak

$$\sum_{n \in F} a_n \leq a_1 + \cdots + a_m \leq s,$$

kde první nerovnost plyne z toho, že členy jsou nezáporné a že všechny sčítance z levé strany se vyskytují i na pravé straně; druhá nerovnost plyne z $(**)$.

Ze vzorce $(***)$ je pak zřejmé, že součet nezávisí na přerovnání. (Pokud přičítáme nezáporné členy, součet se stále zvětšuje [nebo zůstává stejný, je-li přičtený člen roven 0], a celkový součet nezávisí na pořadí.)

- Důkaz pro obecný případ:

Nechť $\sum_n a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_n a_{k_n}$ je její přerovnání.

Krok 1: Přerovnání je absolutně konvergentní.

$\sum_n |a_n|$ je konvergentní řada s nezápornými členy.

$\sum_n |a_{k_n}|$ je její přerovnání, a tedy podle již dokázaného případu je konvergentní (a má stejný součet).

To ovšem znamená, že $\sum_n a_{k_n}$ je absolutně konvergentní.

Krok 2: Přerovnání má stejný součet.

Řady $\sum_n a_n^+$ a $\sum_n a_n^-$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy (viz důkaz Věty VII.4).

Řada $\sum_n a_{k_n}^+$ je přerovnáním řady $\sum_n a_n^+$, a tedy podle již dokázaného případu je konvergentní a navíc

$$\sum_n a_{k_n}^+ = \sum_n a_n^+.$$

Stejně tak řada $\sum_n a_{k_n}^-$ je přerovnáním řady $\sum_n a_n^-$, a tedy podle již dokázaného případu je konvergentní a navíc

$$\sum_n a_{k_n}^- = \sum_n a_n^-.$$

Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $x = x^+ - x^-$, podle Větičky VII.2 dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_n a_{k_n} &= \sum_n (a_{k_n}^+ - a_{k_n}^-) = \sum_n a_{k_n}^+ - \sum_n a_{k_n}^- = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^- \\ &= \sum_n (a_n^+ - a_n^-) = \sum_n a_n.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

K poznámce za Větou VII.11:

- Tuto poznámku dále nebudeme používat, ale ukazuje, jak veliký je rozdíl mezi absolutní a neabsolutní konvergencí.

- Tuto poznámku nebudeme ani dokazovat. Poznamenáme jen, že v případě, že $\sum_n a_n$ je neabsolutně konvergentní, je $a_n \to 0$ a přitom $\sum_n a_n^+ = \sum a_n^- = +\infty$.

  Pokud řadu přerovnáme tak, že se budou vhodným způsobem střídat bloky kladných a záporných členů, můžeme docílit toho, že přerovnání má předem zadaný součet, nebo že součet nemá.

  Ilustrací tohoto postupu jsou příklady 8 a 9 z oddílu VII.1. Obecný důkaz se dělá pečlivou modifikací těchto příkladů.

K Větě VII.12:

- Význam a motivace:

  Víme, že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a že sčítání je komutativní a asociativní. Tyto vlastnosti nám umožňují „roznásobovat závorky“.

  Platí tedy například:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) &= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2, \\ (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) &= a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 \\ &\qquad + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

  Obecněji

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j,$$

tj. roznásobíme systémem „každý s každým“ a všechny součiny sečteme (na pořadí ovšem nezáleží).

Obsah Věty VII.12 je, že podobnou věc jde udělat i pro nekonečné řady, ovšem za předpokladu, že jsou absolutně konvergentní.

Poznámka: Je důležité rozumět znění věty a umět použít níže uvedený vzorec pro „Cauchyův součin řad“. Není nezbytně nutné znát důkaz (ale může pomoci k porozumění).

- Důkaz pro řady s nezápornými členy:

  Předpokládejme, že $\sum_n a_n$ a $\sum_n b_n$ jsou konvergentní řady s nezápornými členy.

  Označme jejich součty $s = \sum_n a_n$ a $t = \sum_n b_n$. Pak platí

$$\begin{aligned} st &= \lim_{m\to\infty}(a_1 + \cdots + a_m) \cdot \lim_{m\to\infty}(b_1 + \cdots + b_m) \\ &\overset{AL}{=} \lim_{m\to\infty}(a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_m) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\right). \end{aligned}$$

  Pak poslední výraz je limita částečných součtů řady $\sum_m d_m$, kde členy d_m jsou definovány podle následujícího schématu:

$$\begin{array}{c|ccccccc} {\color{red}d_1} & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \ldots & a_1b_m & \ldots \\ {\color{blue}d_2} & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \ldots & a_2b_m & \ldots \\ {\color{red}d_3} & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \ldots & a_3b_m & \ldots \\ {\color{blue}d_4} & a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \ldots & a_4b_m & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots \\ {\color{green}d_m} & a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & a_mb_4 & \ldots & a_mb_m & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{$\square$}$$

  To jest, d_m je součet součinů v vyznačených pruzích (přesněji řečeno ve dvojici kolmých pruhů, tj. $d_1 = a_1b_1$, $d_2 = a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2$ atd.).

  Řada $\sum_m d_m$ vznikla „uzávorkováním“ řady, jejíž členy jsou a_ib_j uspořádané (například) po uvedených dvojicích pruhů a v každé takové dvojici pruhů nejprve zleva doprava a následně zdola nahoru, tedy ve směru šipek naznačených na následující obrázku:

$$
\begin{array}{lllllll}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots & a_1b_m & \dots \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow & \dots \\
a_2b_1 \rightarrow & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots & a_2b_m & \dots \\
 & & \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow & \dots \\
a_3b_1 \rightarrow & a_3b_2 \rightarrow & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots & a_3b_m & \dots \\
 & & & \uparrow & \dots & \uparrow & \dots \\
a_4b_1 \rightarrow & a_4b_2 \rightarrow & a_4b_3 \rightarrow & a_4b_4 & \dots & a_4b_m & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \uparrow & \dots \\
a_mb_1 \rightarrow & a_mb_2 \rightarrow & a_mb_3 \rightarrow & a_mb_4 & \rightarrow & a_mb_m & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\qquad (\triangle)
$$

Jde tedy o řadu

$$a_1b_1 \;\; + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 \;\; + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + \dots$$

To je řada s nezápornými členy. Její uvedené uzávorkování má součet st, tedy podle Větičku VII.10(ii) je řada konvergentní a má součet st.

A to je přesně to, co jsme chtěli dokázat. (To, že můžeme členy uspořádat libovolným způsobem, plyne z Věty VII.11.)

- Důkaz pro obecné absolutně konvergentní řady:

  Předpokládejme, že $\sum_n a_n$ a $\sum_n b_n$ jsou absolutně konvergentní řady.

  Označme jejich součty $s = \sum_n a_n$ a $t = \sum_n b_n$. (To má smysl, protože díky Větě VII.4 víme, že řady jsou konvergentní.)

  Uspořádejme součiny a_ib_j, $i, j \in \mathbb{N}$ nějakým způsobem do posloupnosti $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ (jak je uvedeno ve znění věty).

  Krok 1: Řada $\sum_k c_k$ je absolutně konvergentní.

  Podle předpokladu jsou $\sum_n |a_n|$ a $\sum_n |b_n|$ konvergentní řady s nezápornými členy.

  Navíc posloupnost $|c_k|$ obsahuje přesně součiny $|a_i| \cdot |b_j|$, $i, j \in \mathbb{N}$ nějakým způsobem uspořádané do posloupnosti.

  Podle již dokázaného případu víme, že $\sum_k |c_k|$ je konvergentní (a její součet je roven $(\sum_n |a_n|) \cdot (\sum_n |b_n|)$).

  Proto je $\sum_k c_k$ absolutně konvergentní.

Krok 2: Součet řady $\sum_k c_k$ je roven st.

Z kroku 1 víme, že je řada absolutně konvergentní, tedy i konvergentní (Věta VII.4).

Z Věty VII.11 víme, že součet nezávisí na přerovnání, můžeme tedy členy řady uspořádat způsobem znázorněným v ($\triangle$).

Protože řada konverguje, podle Větičky VII.10(i) můžeme součet spočítat jako součet nějakého uzávorkování. Zvolíme uzávorkování znázorněné v ($\square$).

Pak opakováním výše uvedého výpočtu v opačném pořadí dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_k c_k = \sum_m d_m &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i b_j\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_m) \\ &\overset{AL}{=} \lim_{m\to\infty}(a_1+\cdots+a_m)\cdot \lim_{m\to\infty}(b_1+\cdots+b_m) = st.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

- Cauchyův součin řad:

Z Věty VII.12 plyne, že počítáme-li součin absolutně konvergentních řad, můžeme ho vyjádřit jako součet řady s členy $a_i b_j$ nějak (libovolně uspořádaných do posloupnosti).

Důkaz jsme provedli tak, že jsme jednak dokázali absolutní konvergenci a jednak spočetli součet pro jedno zvolené uspořádání.

Často se používá jiné přerovnání, které dá vzorec

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right).$$

Jde o uzávorkování řady, v níž jsou členy a_ib_j uspořádány „po diagonálách, jak naznačuje následující diagram:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

- Pro neabsolutně konvergentní řady věta neplatí. Protože řada $\sum_k c_k$ nevyjde absolutně konvergentní, není jasné, jak bychom tyto prvky měli seřadit. Při seřazení ($\triangle$) a uzávorkování ($\square$) nám sice vyjde součin st, ale to je jen důsledek věty o aritmetice limit, který není sám o sobě ani zajímavý ani použitelný.

  Důležitost této věty spočívá zejména v možnosti prvky libovolně uspořádat a uzávorkovat.