K oddílu VII.2 – druhá část

Úvodní poznámky:

- Srovnávací kritéria (Věty VII.3, VII.3' a VII.5) nám poskytují metody, jak zjistit, zda daná řada konverguje, pomocí jejího srovnání s jinou řadou, o které to již víme.

  Abychom tato kritéria mohli efektivně používat, potřebujeme mít nějakou zásobu řad, s nimiž můžeme srovnávat.

  V oddílu VII.1 jsme v příkladu 2 analyzovali konvergenci geometrické řady. Na porovnání s geometrickou řadou jsou založeny Věty VII.6 a VII.7.

  Věta VII.8 potom dává jemnější škálu řad, které konvergují či divergují „pomaleji než“ geometrická řada.

- Uvedené věty samozřejmě nestačí pro vyšetření konvergence každé řady s nezápornými členy. Existují jemnější kritéria, kterými se ovšem nebudeme zabývat. Ani ta ovšem nezahrnují všechny myslitelné řady.

K Větě VII.6:

- Důkaz bodu (i):

  Označme $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Podle předpokladu limita existuje a platí $L < 1$. Protože jde o limitu posloupnosti nezáporných čísel, je $L \geq 0$ (věta o limitě a uspořádání).

  Zvolme nějaké $q \in (L, 1)$. (To lze, protože $L < 1$.)

  Pak platí $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < q$. Tedy podle věty o limitě a uspořádání existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že
  $$\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < q. \qquad (\circ)$$
  Odtud plyne (umocněním nerovnosti na n-tou, což lze udělat, protože funkce $x \mapsto x^n$ je rostoucí na $\langle 0, +\infty)$), že
  $$\forall n \geq n_0 : 0 \leq |a_n| < q^n.$$
  Protože $q \in (0, 1)$, řada $\sum_n q^n$ konverguje (viz příklad 2 v oddílu VII.1).

  Nyní z Věty VII.3'(i) plyne, že konverguje i řada $\sum_n |a_n|$, tedy řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně.

  Tím je důkaz dokončen.

- Důkaz bodu (ii):

  Předpoklad říká, že $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Tedy podle věty o limitě a uspořádání existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že
  $$\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$
  Odtud plyne (umocněním na n-tou), že
  $$\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1. \tag{$*$}$$
  Z toho ovšem plyne, že $a_n \not\to 0$. (Kdyby totiž platilo $a_n \to 0$, z definice limity by plynula existence $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ platí $|a_n| < 1$. To je ve sporu s $(*)$.)

  Proto řada $\sum_n a_n$ diverguje podle Věty VII.1 (není splněna nutná podmínka konvergence).

- Použitelnost věty: Tato věta je použitelná (koneckonců jako každá matematická věta) jen v případě, že jsou splněny její předpoklady.

  V tomto případě to znamená, že větu lze použít pouze v případě, že

  - umíme spočítat $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$,
  - a tato limita vyjde různá od 1.

  Speciálně, pokud limita neexistuje nebo vyjde 1, věta nic neříká (a musíme zvolit jinou metodu).

  To ilustrují i následující dva příklady. Víme, že
  $$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje a řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje}$$
  a přitom
  $$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

- Pokud limita vyjde 1, věta je zcela nepoužitelná, jak ilustrují dva právě uvedené příklady. Pokud však limita neexistuje, někdy lze použít nelimitní verze této věty:

  Předpokládejme, že existuje $q \in (0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. Pak řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně.

  Důkaz byl vlastně proveden v rámci důkazu bodu (i), stačí začít od $(\circ)$.

K Větě VII.7:

- Důkaz bodu (i):

  Označme $L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Podle předpokladu limita existuje a platí $L < 1$. Protože jde o limitu posloupnosti nezáporných čísel, je $L \geq 0$ (věta o limitě a uspořádání).

  Zvolme nějaké $q \in (L, 1)$. (To lze, protože $L < 1$.)

  Pak platí $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$. Tedy podle věty o limitě a uspořádání existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

  $$\forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q. \tag{$\triangle$}$$

  Odtud plyne (vynásobením nerovnosti kladným číslem $|a_n|$), že

  $$\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

  Odsud matematickou indukcí dokážeme, že

  $$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |a_{n_0}| q^{n-n_0}.$$

  (Pro $n = n_0$ platí rovnost. Pokud nerovnost platí pro nějaké $n \geq n_0$, pak

  $$|a_{n+1}| < q|a_n| \leq q \cdot |a_{n_0}| q^{n-n_0} = |a_{n_0}| q^{n+1-n_0},$$

  a tedy nerovnost platí i pro $n + 1$.)

  Máme tedy

  $$\forall n \geq n_0 : 0 \leq |a_n| \leq |a_{n_0}| q^{n-n_0}.$$

  Protože $q \in (0, 1)$, řada $\sum_n q^n$ konverguje (viz příklad 2 v oddílu VII.1).

  Podle Větičky VII.2 konverguje i řada

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_0}| q^{n-n_0}.$$

  Nyní z Věty VII.3'(i) plyne, že konverguje i řada $\sum_n |a_n|$, tedy řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně.

  Tím je důkaz dokončen.

- Důkaz bodu (ii):

  Předpoklad říká, že $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$. Tedy podle věty o limitě a uspořádání existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že
  $$\forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$
  Odtud plyne (vynásobením $|a_n|$), že
  $$\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| > |a_n|.$$
  Odsud snadno plyne, že
  $$\forall n \geq n_0 : |a_n| \geq |a_{n_0}| \tag{$\square$}$$
  (například matematickou indukcí; posloupnost $\{|a_n|\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rostoucí).

  Z toho ovšem plyne, že $a_n \not\to 0$. (Kdyby totiž platilo $a_n \to 0$, z definice limity by plynula existence $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_1$ platí $|a_n| < |a_{n_0}|$ (uvědomme si, že $|a_{n_0}| > 0$). To je ve sporu s ($\square$).)

  Proto řada $\sum_n a_n$ diverguje podle Věty VII.1 (není splněna nutná podmínka konvergence).

- Použitelnost věty: I tato věta je použitelná jen v případě, že jsou splněny její předpoklady.

  V tomto případě to znamená, že větu lze použít pouze v případě, že

  - umíme spočítat $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$,
  - a tato limita vyjde různá od 1.

  Speciálně, pokud limita neexistuje nebo vyjde 1, věta nic neříká (a musíme zvolit jinou metodu).

  To ilustrují stejné dva příklady jako u Věty VII.6. Víme, že
  $$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje a řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje}$$
  a přitom
  $$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

- Pokud limita vyjde 1, věta je zcela nepoužitelná, jak ilustrují dva právě uvedené příklady. Pokud však limita neexistuje, někdy lze použít nelimitní verze této věty:

  Předpokládejme, že existuje $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ platí $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$. Pak řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně.

  Důkaz byl vlastně proveden v rámci důkazu bodu (i), stačí začít od ($\triangle$).

K Větě VII.8

- Tato věta poskytuje jemnější škálu řad než předchozí dvě věty.

  Pro řady z této věty totiž předchozí dvě věty nelze použít, protože příslušné limity vyjdou 1.

- Důkaz implikace $\Rightarrow$:

  Dokážeme obměnu, tj.

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverguje.}$$

  Dokazovat to však už nebudeme, protože jsme to již dokázali. Příklad 5 z oddílu VII.1 to dokazuje pro $\alpha = 1$. Případ $\alpha < 1$ byl pak dokázán v příkladu 4 ilustrujícím použití Věty VII.3.

- Důkaz implikace $\Leftarrow$:

  Dokazujeme tedy implikaci

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje.}$$

  Použijeme přitom podobný trik jako při důkazu divergence $\sum_n \frac{1}{n}$.

  Nechť $\alpha > 1$.

  Označme s_m m-tý částečný součet řady $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, tj.

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{m^\alpha}.$$

Protože řada má kladné členy, je posloupnost $\{s_m\}$ rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti má tedy limitu (vlastní nebo nevlastní).

Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu. Proto, chceme-li dokázat, že řada konverguje, tj. že posloupnost $\{s_m\}$ má vlastní limitu, stačí dokázat, že nějaká vybraná posloupnost má vlastní limitu.

Dokážeme to pro posloupnost s_{2^k}. K tomu účelu odhadněme rozdíl $s_{2^{k+1}} - s_{2^k}$:

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}} - s_{2^k} &= \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+2)^\alpha} \cdots + \frac{1}{(2^{k+1})^\alpha} \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} \cdots + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha}}_{2^k\text{-krát}} \\ &\leq \frac{2^k}{(2^k+1)^\alpha} \leq \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = (2^k)^{1-\alpha} = (2^{1-\alpha})^k. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$s_{2^{k+1}} \leq s_{2^k} + (2^{1-\alpha})^k$$

pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tedy

$$\begin{aligned} s_{2^0} &= s_1 = 1, \\ s_{2^1} &= s_1 + (s_2 - s_1) \leq 1 + (2^{1-\alpha})^0, \\ s_{2^2} &= s_2 + (s_4 - s_2) \leq 1 + (2^{1-\alpha})^0 + (2^{1-\alpha})^1, \\ s_{2^3} &= s_4 + (s_8 - s_4) \leq 1 + (2^{1-\alpha})^0 + (2^{1-\alpha})^1 + (2^{1-\alpha})^1, \\ &\vdots \\ s_{2^{k+1}} &= s_{2^k} + \left(s_{2^{k+1}} - s_{2^k}\right) \leq 1 + (2^{1-\alpha})^0 + (2^{1-\alpha})^1 + \cdots + (2^{1-\alpha})^{k-1} + (2^{1-\alpha})^k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Matematickou indukcí tedy dostáváme

$$s_{2^k} \leq 1 + \sum_{j=0}^{k-1} (2^{1-\alpha})^j$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Protože $\alpha > 1$, je $1 - \alpha < 0$, a tedy $2^{1-\alpha} \in (0, 1)$.

Podle příkladu 2 z oddílu VII.1 geometrická řada

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^j$$

konverguje a má součet $\frac{1}{1-2^{1-\alpha}}$ (uvědomme si, že zde sčítáme od $j = 0$, ne od $j = 1$ jako v oddílu VII.2).

Proto máme

$$\forall k \in \mathbb{N} : s_{2^k} \leq 1 + \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.$$

Tedy posloupnost $\{s_{2^k}\}$ je shora omezená.

Protože tato posloupnost je též rostoucí, podle věty o limitě monotónní posloupnosti má vlastní limitu.

Jak jsme vysvětlili na začátku, plyne z toho, že řada konverguje.

- Tato věta v kombinaci s Větou VII.5 umožňuje vyšetřit konvergenci mnoha řad, jak uvidíme třeba v příkladech ze supersemináře. Zde uvádím několik jednoduchých příkladů bez podrobného vysvětlení řešení:

  1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ diverguje, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+3}}{\frac{1}{n}} = 1$ a $\sum_n \frac{1}{n}$ diverguje.
  2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$ konverguje, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje.
  3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ konverguje, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 0$ a $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje.