Matematika IV – otázky pro teoretickou část
LS 2020/2021

1. Zformulujte *Peanovu větu o existenci řešení pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *rovnice se separovanými proměnnými*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

2. Zformulujte *Peanovu větu o existenci řešení pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

3. Zformulujte *větu o existenci a jednoznačnosti řešení pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *rovnice se separovanými proměnnými*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

4. Zformulujte *větu o existenci a jednoznačnosti řešení pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

5. Zformulujte *větu o existenci a jednoznačnosti řešení pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *lineární rovnice prvního řádu*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

6. Zformulujte *větu o existenci a jednoznačnosti řešení pro obecné soustavy*, dále ji zformulujte pro *lineární rovnice s konstantními koeficienty* a tento speciální případ odvoďte z uvedené obecné věty.

7. Zformulujte *větu o opouštění kompaktu pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *rovnice se separovanými proměnnými*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

8. Co lze říci o existenci a jednoznačnosti řešení Bernoulliho rovnice $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ na základě Peanovy věty o existenci a věty o existenci a jednoznačnosti a co na základě metody řešení? Jak to závisí na parametru α?

9. Zformulujte *větu o opouštění kompaktu pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

10. Zformulujte *větu o rovnicích s lineárním růstem pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *rovnice se separovanými proměnnými*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

11. Zformulujte *větu o rovnicích s lineárním růstem pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

12. Zformulujte *větu o rovnicích s lineárním růstem pro obecné soustavy*, dále ji zformulujte pro *soustavy lineárních rovnic* a tento speciální případ odvoďte z uvedené obecné věty.

13. Zformulujte *větu o rovnicích s lineárním růstem pro obecné soustavy*, dále ji zformulujte pro *lineární rovnice s konstantními koeficienty* a tento speciální případ odvoďte z uvedené obecné věty.

14. Uvažme Bernoulliho rovnici $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, kde $\alpha \in (0,1)$ a funkce p, q jsou spojité na intervalu (a,b). Pomocí metody řešení (a nalepování) ukažte, že maximální řešení jsou definována na celém intervalu (a,b). Lze použít i věta o rovnicích s lineárním růstem (aspoň pro některá α)?

15. Zformulujte *větu o spojité závislosti na počátečních podmínkách pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

16. Zformulujte *větu o stabilitě pro lineárních soustavy pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *lineární rovnice s konstantními koeficienty*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

17. Zformulujte *Ljapunovovu větu o stabilitě pro obecné soustavy* a vysvětlete, co tato věta říká pro *autonomní rovnice*. Pro tento speciální případ ji dokažte.

18. Uvažme rovnici $y' = x^2 - y^2$. Nechť y je maximální řešení této rovnice splňující $y(1) > -1$. Ukažte, že y je definováno na intervalu obsahujícím interval $\langle 1, +\infty)$ a pro každé $x \in \langle 1, +\infty)$ platí $y(x) > -x$.

19. Uvažme rovnici $y' = x - y^2$. Nechť y je maximální řešení této rovnice splňující $y(1) > -1$. Ukažte, že y je definováno na intervalu obsahujícím interval $\langle 1, +\infty)$ a pro každé $x \in \langle 1, +\infty)$ platí $y(x) > -\sqrt{x}$.

Poznámka: Při řešení úloh 1–17 pomohou doplňující cvičení k jednotlivým oddílům. V úlohách 18 a 19 je možné použít větu o existenci a jednoznačnosti, úvahy o monotonii řešení a větu o opouštění kompaktu.