Komentář k oddílu XVII.5 – Stabilita stacionárních řešení autonomních soustav

K obsahu a smyslu tohoto oddílu:

- Soustavy diferenciálních rovnic často slouží k modelování časového vývoje nějakých procesů (fyzikálních, biologických, ekonomických atp.).

  Za určitých předpokladů (viz Věta XVII.3) platí, že pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení, které ji splňuje.

  V řeči modelování to znamená, že počáteční stav jednoznačně určuje budoucí vývoj (a také minulý vývoj).

- V konkrétních modelech a jejich konkrétních aplikacích ovšem mnohé věci nevíme přesně.

  Neumíme přesně určit (změřit) současný stav a často ani neumíme spočítat explicitní vzorec pro přesné řešení.

  Pak přicházejí ke slovu přibližné a numerické metody – takových metod existuje celá řada a mnohé jsou také implementovány v různých softwarových nástrojích.

  Ale abychom věděli, že ta numericky spočítaná řešení jsou opravdu přibližná řešení (tj. od přesného řešení se liší jen málo), potřebujeme vědět – zhruba řečeno – že když uděláme malou chybu ve vstupních datech, bude i ve výsledku chyba malá.

- Jednou z vět v tomto směru je Věta XVII.13 o spojité závislosti na počátečních podmínkách.

  Ta říká (zjednodušeně), že když se málo změní počáteční podmínka, pak se málo změní řešení – ale jen na nějakém předem určeném uzavřeném intervalu.

  V tomto oddílu se budeme zabývat podmínkami, za nichž malá změna počáteční podmínky vyvolá malou změnu „až do nekonečna“.

- Věty o stabilitě jsou takovým snem teoretických ekonomů – cílem je jakási všeobecná rovnováha (equilibrium), v některých makroekonomických modelech nazývaná „bliss point“, tedy bod blaženosti, což je ekonomická verze věčné blaženosti dosažitelné tou správnou mírou spotřeby.

- V teorii soustav diferenciálních rovnic je taková rovnováha reprezentovaná stacionárním (konstantním) řešením.

  Za určitých předpokladů pak platí, že pokud se počáteční podmínka málo liší od rovnovážné hodnoty, pak limitou řešení je právě ta rovnovážná hodnota.

  A to je přesně to, co ekonomové chtějí – vývoj ekonomiky směřuje k rovnováze, k věčné blaženosti. A podle jejich zaměření buď sám od sebe (podle pravicově zaměřených ekonomů) nebo v případě, že stát správně nastaví parametry a správně procesy usměrňuje (podle levicově zaměřených ekonomů).

- Nakolik to odpovídá realitě, nechť si posoudí každý sám. Ale je s tím spojena velmi zajímavá část matematiky, do které v tomto oddílu stručně nahlédneme.

Základní situace a základní pojmy:

- V tomto oddílu se budeme zabývat soustavami tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \tag{$*$}$$

  kde $\boldsymbol{x}$ je neznámá vektorová funkce a $\boldsymbol{g}$ je vektorové zobrazení definované na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ (tj. $\boldsymbol{g}\colon G \to \mathbf{R}^n$).

  Navíc předpokládáme, že $\boldsymbol{g}$ je třídy C^1 na množině G.

  Zápis po složkách je

$$\begin{aligned} x_1' &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

  přičemž funkce $g_1, \ldots, g_n$ jsou třídy C^1 na množině G.

- Za této situace z Věty XVII.3 plyne, že pro každé $t_0 \in \mathbf{R}$ a každé $\boldsymbol{b} \in G$ existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $(*)$ splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}$.

- Soustavy tvaru $(*)$ jsou autonomní, tj. na pravé straně se nevyskytuje samostatně proměnná t (čas).

  Stejně jako u autonomních rovnic z oddílu XIV.2 tedy další vývoj závisí jen na okamžitém stavu, nikoli přímo na čase.

  Platí i následující tvrzení, které je zcela analogické podobnému tvrzení z oddílu XIV.2 a jeho důkaz je také stejný:

  Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení soustavy $(*)$ definované na intervalu (a, b). Dále nechť $c \in \mathbf{R}$. Pak vektorová funkce $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t + c)$ je řešením soustavy $(*)$ na intervalu $(a - c, b - c)$.

- Stacionární bod soustavy $(*)$ je takový bod $\boldsymbol{a} \in G$, pro který platí $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = 0$.

  To přesně znamená, že konstantní funkce

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}, \quad t \in \mathbf{R},$$

  je řešením soustavy $(*)$.

  Konstantní řešení se nazývají též stacionární. Pokud soustava modeluje nějaký proces, pak stacionární řešení reprezentují rovnovážné stavy. Rovnovážný stav je takový stav, který se nemění, zůstává stále stejný.

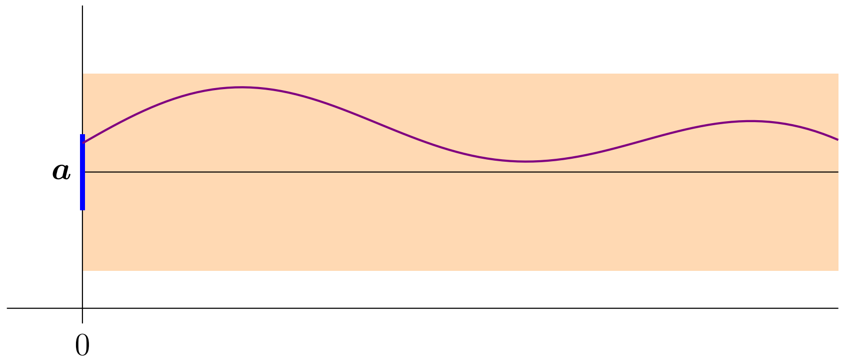
- Předmětem zájmu v tomto oddílu je otázka, co se stane, pokud počáteční podmínka je blízko stacionárního bodu – zda celý další vývoj řešení zůstane v blízkosti stacionárního řešení nebo ne a zda případně bude mít limitu rovnou stacionárnímu bodu.

  To vyjadřují následující definice:

  – Stacionární bod $\boldsymbol{a}$ soustavy je stabilní, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé řešení $\boldsymbol{x}$, které splňuje $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \delta$, platí

    * $\boldsymbol{x}$ je definováno na intervalu obsahujícím interval $\langle 0, +\infty)$;
    * $\forall t \in \langle 0, +\infty)\colon \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$.

    Ilustrujme to na obrázku:



Pro každé $\varepsilon > 0$ (to reprezentuje oranžový pás šířky ε) existuje $\delta > 0$ (to reprezentuje modrá úsečka o poloměru δ) tak, že kdykoli řešení splňuje $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \delta$ (tj. prochází modrou úsečkou), pak je definované až do nekonečna a nevzdálí se více než ε od $\boldsymbol{a}$ (tj. graf na intervalu $\langle 0, +\infty)$ je celý obsažen v oranžovém pásu). Fialově je vyznačen možný graf takového řešení.

Jak se tato řešení chovají pro $t < 0$, není podstatné – zajímá nás vývoj do budoucnosti, nikoli minulost.

Nenechme se zmást tím, že fialové řešení na obrázku se nachází celé na jedné straně do stacionárního řešení. To je způsobeno tím, že obrázek je dvourozměrný, a tedy zachycuje případ $n = 1$ – tedy jedné rovnice. Pak oranžový pás je skutečně stacionárním řešením rozdělen na dvě části – nad řešením a pod řešením. A protože se řešení nemohou protínat, musí být každé řešení buď nad stacionárním nebo pod ním.

Pro větší n to tak není – například pro $n = 2$ oranžový pás je ve skutečnosti nekonečný válec o poloměru ε okolo stacionárního řešení, a tak řešení obsažená v tomto válci mohou stacionární řešení různě obtáčet.

– Pokud stacionární bod $\boldsymbol{a}$ není stabilní, pak mu (nikoli překvapivě) říkáme nestabilní.

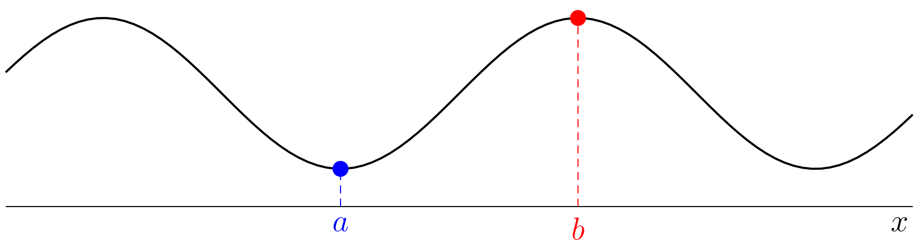
– Silnější verzí stability je asymptotická stabilita. Přesněji, stacionární bod $\boldsymbol{a}$ je asymptoticky stabilní,

  * pokud je stabilní,
  * a navíc existuje $\Delta > 0$, že pro každé řešení splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \Delta$ platí $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}$.

Zdůrazněme, že součástí definice asymptotické stability je podmínka stability, která neplyne automaticky z druhé podmínky. Konkrétní příklad nebudeme uvádět, ale je myslitelné, že každé řešení se nejprve vzdálí od stacionárního například do vzdálenosti 1 nebo vyšší, ale pak se opět přiblíží a jeho limitou je stacionární bod.

- Uveďme ilustrativní příklad, ne přímo soustavy rovnic, ale fyzikálního procesu, který demonstruje definované pojmy.

  Mějme drát ve tvaru sinusoidy a na něm navlečený korálek, který se po onom drátě může pohybovat.

  Stav korálku v čase t popíšeme dvojicí $[x(t), v(t)]$, kde $x(t)$ je x-ová souřadnice polohy korálku a $v(t)$ je okamžitá rychlost korálku ve směru osy x (kladná rychlost znamená pohyb doprava, záporná pohyb doleva).

  Předpokládejme, že na korálek působí gravitační síla ve směru svisle dolů a že po drátě klouže bez tření.

  Pak třeba $[a, 0]$ a $[b, 0]$ jsou stacionární body. Pokud se korálek nachází v jednom z těchto bodů a má nulovou rychlost, zůstane stát na místě.

  Bod $[b, 0]$ je ovšem nestabilní. Stačí libovolně malá výchylka polohy nebo rychlosti a korálek působením gravitace klouže do nejbližšího údolí, takže se vzdálí od stacionárního bodu. (V údolí se nezastaví, ale to teď není podstatné.)

  Bod $[a, 0]$ je stabilní, ale ne asymptoticky stabilní. Pokud se málo změní poloha či rychlost, pak korálek bude periodicky klouzat tam a zpět kolem bodu a.

  Pokud ovšem na korálek působí i tření, pak je bod $[a, 0]$ asymptoticky stabilní. Pokud se totiž málo změní poloha či rychlost, bude opět klouzat tam a zpět kolem bodu a. Zároveň však vlivem tření bude zpomalovat a výchylky se budou zmenšovat, takže se bude blížit ke stacionárnímu bodu $[a, 0]$.

K Větě XVII.14:

- Speciálním případem autonomních soustav jsou homogenní soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty, tj. soustavy

  $$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \tag{$**$}$$

  kde $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n.

  Taková soustava má vždy aspoň jeden stacionární bod, a to $\boldsymbol{o}$.

  Pokud je $\mathbb{A}$ regulární, je to jediný stacionární bod.

  Pokud $\mathbb{A}$ není regulární, existuje nekonečně mnoho stacionárních bodů – jsou to všechna $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ splňující $\mathbb{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, tedy prvky jádra lineárního zobrazení reprezentovaného maticí $\mathbb{A}$.

- Věta XVII.14 se zabývá podmínkami, za kterých je stacionární bod $\boldsymbol{o}$ soustavy $(**)$ stabilní nebo asymptoticky stabilní.

- Bod (i) říká, že bod $\boldsymbol{o}$ je asymptoticky stabilní, právě když každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ splňuje $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

  To plyne z metody řešení těchto soustav z oddílu XVII.3 (viz úlohu 3 z doplňujících cvičení k tomuto oddílu).

  Podrobný důkaz dělat nebudeme.

- Bod (ii) říká, že bod $\boldsymbol{o}$ je stabilní, právě když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí

  - $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$,
  - pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak násobnost λ je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.

  Ani ten nebudeme podrobně dokazovat. Plyne z důkladné analýzy metody řešení z oddílu XVII.3, která byla naznačena v úlohách 7, 10, 13, 14 z doplňujících cvičení k tomuto oddílu.

K Větě XVII.15:

- Tato věta se zabývá podmínkami, za nichž je stabilní či asymptoticky stabilní stacionární bod v obecném případě.

  Na rozdíl od lineárních soustav tentokrát nemáme žádnou jednoduchou charakterizaci, ale pouze dvě implikace.

  Vysvětlíme tedy předpoklady a tvrzení věty a také meze její použitelnosti.

- Máme soustavu $(*)$ a její stacionární bod $\boldsymbol{a}$. Uvažme matici

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

  To je Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{g}$ v bodě $\boldsymbol{a}$, s níž jsme se setkali v jiném kontextu v kapitole VIII ve větě o substituci pro Lebesgueův integrál.

  Zde nás ovšem nebude zajímat její determinant, ale její vlastní čísla, jak vysvětlíme níže.

- Protože funkce $g_1, \ldots, g_n$ jsou třídy C^1, z Věty V.12 (o tečnosti tečné nadroviny) plyne

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{a}) - \nabla g_i(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0,$$

  kde používáme značení z dalších oddílů (maticové násobení z kapitoly VI a normu z oddílu IX.3).

  Protože $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod, neboli $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, je $g_i(\boldsymbol{a}) = 0$ pro každé i, a tedy platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{g_i(\boldsymbol{x}) - \nabla g_i(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

  Protože řádky matice $\mathbb{A}$ jsou právě gradienty funkcí $g_1, \ldots, g_n$ v bodě $\boldsymbol{a}$, lze těchto n rovností zapsat najednou v maticovém tvaru

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = \boldsymbol{o}.$$

Pokud označíme

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{x} \in G,$$

tj.

$$h_i(\boldsymbol{x}) = g_i(\boldsymbol{x}) - \nabla g_i(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{x} \in G, i \in \{1, \ldots, n\},$$

pak platí

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G$$

a

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = \boldsymbol{o}.$$

- Pak soustava $(*)$ má tvar

  $$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),$$

  kde vektorové zobrazení $\boldsymbol{h}$ je „velmi malé“ v blízkosti $\boldsymbol{a}$ (viz limita výše).

  Pak $\boldsymbol{a}$ je také stacionární bod lineární soustavy

  $$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

  a podle Věty XVII.14 umíme určit, zda je stabilní či asymptoticky stabilní.

  Obsahem Věty XVII.15 je tvrzení, že vlastnosti řešení této lineární soustavy, se přenesou na řešení soustavy $(*)$, a to za předpokladu, že v lineárním případě jsou splněny „výrazným způsobem“, což dále upřesníme, co znamená.

- Bod (i): Pokud pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re} \lambda < 0$, pak $\boldsymbol{a}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod soustavy $(*)$.

  Podle Věty XVII.14 víme, že tato podmínka je ekvivalentní tomu, že $\boldsymbol{o}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A} \cdot \boldsymbol{x}$, což je evidentně ekvivalentní tomu, že $\boldsymbol{a}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$.

  Bod (i) nám říká, že perturbace pomocí „malé“ funkce $\boldsymbol{h}$ (viz výše) asymptotickou stabilitu nepokazí.

- Bod (ii): Pokud existuje vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$, pro které platí $\operatorname{Re}\lambda > 0$, pak stacionární bod $\boldsymbol{a}$ je nestabilní.

  V tomto případě z Věty XVII.14 plyne, že $\boldsymbol{o}$ je nestabilní stacionární bod soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\cdot\boldsymbol{x}$, neboli $\boldsymbol{a}$ je nestabilní stacionární bod soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.

  Navíc, z metody řešení z oddílu XVII.3 vidíme, že tato nestabilita je „výrazná“ – existuje řešení, které začíná blízko stacionárního řešení a pak se vzdaluje exponenciálním tempem.

  Bod (ii) nám říká, že tento výrazný druh nestability nemůže spravit perturbace pomocí „malé“ funkce $\boldsymbol{h}$ (viz výše).

- Body (i) a (ii) nepokrývají všechny možnosti. V případě, že všechna vlastní čísla λ matice $\mathbb{A}$ splňují $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ a některá z nich splňují $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak tato věta neříká nic.

  Věta XVII.14 nám sice říká, jak poznat, zda $\boldsymbol{a}$ je stabilní bod soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$, ale jeho stabilita či nestabilita je „málo výrazná“ a malá perturbace pomocí funkce $\boldsymbol{h}$ může situaci změnit, a to oběma směry.

  To dále ilustrujeme na příkladech.

- Uvažme případ jedné rovnice $x' = g(x)$, kde funkce g je třídy C^1 na nějakém otevřeném intervalu I a $a \in I$ je stacionární bod. Pak platí:
  - Pokud $g'(a) < 0$, pak a je asymptoticky stabilní. (Bod (i), též to plyne z metod z oddílu XIV.2.)
  - Pokud $g'(a) > 0$, pak a je nestabilní. (Bod (ii), též to plyne z metod z oddílu XIV.2.)
  - Pokud $g'(a) = 0$, pak se může stát cokoli:
    * Pokud $g(x) = x^2$ nebo $g(x) = x^3$, pak $g'(0) = g(0) = 0$ a stacionární bod 0 je nestabilní. (Použijí se metody z oddílu XIV.2.)
    * Pokud $g(x) = 0$, pak $g'(0) = g(0) = 0$ a stacionární bod 0 je stabilní, ale ne asymptoticky stabilní. (Řešením jsou právě konstantní funkce.)
    * Pokud $g(x) = -x^3$, pak $g'(0) = g(0) = 0$ a stacionární bod 0 je asymptoticky stabilní. (Použijí se metody z oddílu XIV.2.)

Tyto příklady ukazují, že v případě, že příslušný stacionární bod „linearizované“ soustavy je stabilní, může pro původní soustavu nastat kterýkoli ze tří případů (asymptotická stabilita, pouze stabilita, nestabilita).

- Pokud příslušný stacionární bod linearizované soustavy je nestabilní, ale přitom všechna vlastní čísla mají nekladnou reálnou část, opět může nastat kterákoli ze tří možností.

  To však už nelze ilustrovat na příkladu jedné rovnice, příklady jsou složitější a uvádět je nebudeme.

- Důkaz Věty XVII.15 provádět nebudeme. Výše byl naznačen její význam – a důkaz spočívá v tom, že se výše uvedená tvrzení ověří pečlivými výpočty.

  Tyto výpočty jsou poněkud komplikovanější verzí výpočtů z důkazu Věty XVII.13. Použijte se opět Lemma XVII.11 (Gronwallovo) a Věta XVII.10 (o opouštění kompaktu), k tomu pečlivá práce s definicí limity použité jednak na tvrzení věty a jednak na limitu, která popisuje malost perturbační funkce $\boldsymbol{h}$.