Komentář k oddílu XVII.1: Soustavy diferenciálních rovnic – základy

Základní pojmy atp.:

- V kapitolách XIV až XVI jsme se zabývali několika typy diferenciálních rovnic a jejich řešením. Zatím vždy šlo o jednu rovnici – ať už prvního nebo vyššího řádu.

  V této kapitole se budeme zabývat soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu. Ne zcela obecnými, ale těmi, které jsou „vyřešené vůči derivaci", jak vysvětlíme níže.

  To je kontext, v jehož rámci se obvykle diferenciální rovnice zkoumají. Ani omezení na rovnice prvního řádu není na úkor obecnosti, jak si také vysvětlíme níže.

- Soustavy, kterými se budeme zabývat, budou soustavy tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

  Proměnnou zde značíme t, neznámé funkce jsou $x_1, \ldots, x_n$. Funkce $f_1, \ldots, f_n$ jsou nějaké funkce $n+1$ proměnných, tedy nějaký výraz, v němž se vyskytuje proměnná t a hodnoty $x_1, \ldots, x_n$.

  Funkce $f_1, \ldots, f_n$ jsou funkce $n+1$ proměnných, a tedy jsou definované na nějaké podmnožině $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Většinou (ale ne úplně vždy) předpokládáme, že množina G je otevřená.

- Jak jsme zmínili výše, uvažujeme soustavy „vyřešené vůči derivaci". To znamená, že na levé straně každé z rovnic je pouze derivace příslušné neznámé funkce a přitom na pravé straně se už derivace neznámých funkcí nevyskytují.

- Soustavy tvaru (1) pro případ $n = 1$ zahrnují i případ jedné diferenciální rovnice prvního řádu. Její tvar je pak

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

kde x je neznámá funkce a f je funkce dvou proměnných (definovaná na nějaké podmnožině $G \subset \mathbf{R}^2$).

Uveďme, jak to tohoto schématu zapadají některé typy rovnic, kterým jsme se věnovali v předchozích kapitolách. (Značení přizpůsobíme této kapitole.)

– Rovnice se separovanými proměnnými

$$x' = g(x) \cdot h(t),$$

kde funce g a h jsou spojité na svých definičních oborech.
V tomto případě máme

$$G = D_h \times D_g \quad \text{a} \quad f(t,x) = g(x) \cdot h(t),\ [t,x] \in G.$$

– Lineární rovnice prvního řádu

$$x' + p(t)x = q(t),$$

kde funkce p, q jsou spojité na nějakém intervalu (a,b).
Tuto rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$x' = -p(t)x + q(t),$$

tedy máme

$$G = (a,b) \times \mathbf{R} \quad \text{a} \quad f(t,x) = -p(t)x + q(t),\ [t,x] \in G.$$

- Uveďme dále, jak do tohoto schématu zapadají soustavy uvedené jako ilustrativní příklady kapitole XIII:

  – Model dravec-kořist:

  $$\begin{aligned} y' &= ay - byz, \\ z' &= -cz + dyz, \end{aligned}$$

  y, z jsou neznámé funkce a a, b, c, d jsou kladné parametry.
  Pak $n = 2$ a

  $$\begin{aligned} f_1(t,y,z) &= ay - byz, \\ f_2(t,y,z) &= -cz + dyz. \end{aligned}$$

  Množina G je v tomto případě $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^3$.

– SIR model šíření epidemií:

$$S' = -\beta \cdot \frac{SI}{N},$$
$$I' = \beta \cdot \frac{SI}{N} - \gamma I,$$
$$R' = \gamma I,$$

kde S, I, R jsou neznámé funkce a N, β, γ jsou kladné parametry ($N = S + I + R$ je velikost populace).

Pak $n = 3$ a

$$f_1(t, S, I, R) = -\beta \cdot \frac{SI}{N},$$
$$f_2(t, S, I, R) = \beta \cdot \frac{SI}{N} - \gamma I,$$
$$f_3(t, S, I, R) = \gamma I.$$

Dále máme $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^4$.

Všimněme si, že v uvedených dvou soustavách se na pravé straně nevyskytuje samostatně proměnná t (tj. funkce $f_1, \dots, f_n$ nezávisí na t). Takovým soustavám se říká autonomní.

- Řešením soustavy (1) je n-tice funkcí $x_1, \dots, x_n$, která soustavu splňuje. Podrobněji:

  Uspořádaná n-tice funkcí $[x_1, \dots, x_n]$ definovaných na nějakém otevřeném intervalu I je řešením soustavy (1), pokud pro každé $t \in I$ platí

$$[t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \in G$$

  a

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

- Analogicky jako v Kapitole XIII definujeme prodloužení řešení a maximální řešení.

- Pokud máme rovnici vyššího řádu, která je vyřešena vůči nejvyšší derivaci, tj. rovnici tvaru

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \tag{$*$}$$

kde F je nějaká funkce $n+1$ proměnných, pak ji můžeme interpretovat jako soustavu rovnic prvního řádu. A to tak, že neznámé budou $x, x', \dots, x^{(n-1)}$. Konkrétně jde o soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_2, \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_3, \\ &\vdots \\ f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_n, \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Vztah rovnice ($*$) a soustavy ($**$) je dán tím, že funkce x je řešením rovnice ($*$) na intervalu I, právě když uspořádaná n-tice $[x, x', \dots, x^{(n-1)}]$ je řešením soustavy ($**$) na intervalu I.

Zároveň n-tice $[x_1, \dots, x_n]$ je řešením soustavy ($**$), právě když funkce x_1 je řešením rovnice ($*$). (Pak $x_2 = x_1', x_3 = x_1'', \dots, x_n = x_1^{(n-1)}$.)

- Speciálně, máme-li lineární rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty, tj. rovnici tvaru

  $$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t),$$

  kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na intervalu (a, b), můžeme ji přepsat jako soustavu

  $$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n. \end{aligned}$$

- Soustavu (1) často doplňujeme počátečními podmínkami – chceme, aby v daném bodě t_0 měly funkce $x_1, \ldots, x_n$ předepsané hodnoty. Tyto podmínky mají tvar

  $$x_1(t_0) = b_1, x_2(t_0) = b_2, \ldots, x_n(t_0) = b_n, \tag{2}$$

  kde $t_0 \in \mathbf{R}$ a $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ jsou dána.

  Kombinace soustavy (1) a počátečních podmínek (2) se nazývá počáteční úloha.

  Uspořádaní n-tice funkcí $[x_1, \ldots, x_n]$ je řešením počáteční úlohy, pokud je řešením soustavy (1) a navíc splňuje počáteční podmínky (2).

  Aby počáteční úloha vůbec mohla mít řešení, je potřeba, aby

  $$[t_0, b_1, \ldots, b_n] \in G,$$

  protože řešení musí splňovat soustavu i v bodě t_0.

- Soustavu (1) často zapisujeme ve vektorovém tvaru jako jednu (vektorovou) rovnici tvaru
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$
Zde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ je neznámá vektorová funkce. (Vektorová funkce je zobrazení definované na nějaké podmnožině $\mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. To znamená, že
$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)],$$
kde $x_1, \dots, x_n$ jsou reálné funkce.)

  Symbol $\boldsymbol{x}'$ značí derivaci vektorové funkce, která se počítá po souřadnicích, tedy
$$\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)].$$
$\boldsymbol{f}$ je pak vektorové zobrazení definované na $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n+1}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$, tj.
$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = [f_1(t, \boldsymbol{x}), f_2(t, \boldsymbol{x}), \dots, f_n(t, \boldsymbol{x})].$$

- Vektorový tvar počátečních podmínek je
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}, \tag{4}$$
kde $t_0 \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ a $[t_0, \boldsymbol{b}] \in G$.

K Větičce XVII.1:

- Tato větička umožňuje počáteční úlohu (tj. soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami) vyjádřit ve formě jedné integrální rovnice.

  To je docela důležité zejména z teoretického hlediska. Usnadňuje to zkoumání vlastností řešení, jak uvidíme později.

- Předpoklady větičky jsou následující:

  Máme soustavu ve tvaru (3), tj. $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{f}$ je zobrazení definované na nějaké množině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Předpokládejme, že množina G je otevřená a zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G (tj. funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou spojité na G).

  Dále uvažujme počáteční podmínku (4), tj. $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}$, kde $[t_0, \boldsymbol{b}] \in G$.

  Kromě toho máme otevřený interval (α, β) obsahující bod t_0 a nějakou vektorovou funkci $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$.

- Za těchto předpokladů větička říká, že $\boldsymbol{x}$ je řešením počáteční úlohy ((3) a (4)), právě když

$$\forall t \in (\alpha,\beta) : \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\, ds. \tag{5}$$

Přitom integrál z vektorové funkce na pravé straně je definován jako Riemannův integrál po složkách, tj.

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\, ds = \left[\int_{t_0}^{t} f_1(s,\boldsymbol{x}(s))\, ds, \int_{t_0}^{t} f_2(s,\boldsymbol{x}(s))\, ds, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(s,\boldsymbol{x}(s))\, ds\right].$$

Tedy rovnost (5) rozepsaná do složek říká, že pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 + \int_{t_0}^{t} f_1(s,x_1(s),\ldots,x_n(s))\, ds,\\ x_2(t) &= b_2 + \int_{t_0}^{t} f_2(s,x_1(s),\ldots,x_n(s))\, ds,\\ &\vdots\\ x_n(t) &= b_n + \int_{t_0}^{t} f_n(s,x_1(s),\ldots,x_n(s))\, ds. \end{aligned} \tag{6}$$

- Důkaz implikace '$\Rightarrow$':

Předpokládejme, že $\boldsymbol{x}$ je řešením počáteční úlohy. Ukažme, že platí (5) respektive (6).

Nejprve si uvědomme, že vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ je spojitá na (α,β) (tj. $x_1,\ldots,x_n$ jsou spojité na (α,β)). To proto, že je řešením soustavy, a tedy má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci.

Z toho ovšem plyne, že i derivace $\boldsymbol{x}'$ je spojitá. Pro každé $j \in \{1,\ldots,n\}$ totiž platí

$$x_j'(t) = f_j(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)), \quad t \in (\alpha,\beta),$$

a funkce napravo je spojitá (jakožto složení spojitých funkcí).

Nyní zvolme $j \in \{1,\ldots,n\}$ a $t \in (\alpha,\beta)$. Pak

$$\begin{aligned} x_j(t) = \underbrace{x_j(t_0)}_{=b_j} + (x_j(t) - x_j(t_0)) &= b_j + \int_{t_0}^{t} x_j'(s)\, ds\\ &= b_j + \int_{t_0}^{t} f_j(s,x_1(s),\ldots,x_n(s))\, ds. \end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z Věty VIII.9 o výpočtu Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce. Třetí rovnost plyne z toho, že $\boldsymbol{x}$ je řešením soustavy.

- Důkaz implikace '$\Leftarrow$':

  Předpokládejme, že vektorová funkce $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ splňuje rovnost (5) respektive (6).

  Nejprve si uvědomme, že dosazením $t = t_0$ do (5) dostaneme $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}$. Neboli $\boldsymbol{x}$ splňuje počáteční podmínku.

  Zbývá ukázat, že $\boldsymbol{x}$ je řešením soustavy. To uděláme v několika krocích.

  Nejprve si uvědomme, že funkce $x_1, \ldots, x_n$ jsou spojité. Pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ je

  $$x_j(t) = b_j + \int_{t_0}^{t} f_j(s, x_1(s), \ldots, x_n(s))\, ds, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

  Protože integrál na pravé straně je Riemannův, z vlastností Riemannova integrálu a z Lemmatu VIII.22 snadno plyne, že x_j je spojitá.

  Dále, protože $x_1, \ldots, x_n$ jsou spojité i f_j je spojitá, je funkce

  $$s \mapsto f_j(s, x_1(s), \ldots, x_n(s))$$

  spojitá na (α, β). Z Věty VIII.7 (o derivaci Riemannova integrálu podle horní meze) pak plyne, že

  $$x_j'(t) = f_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

  což dokončuje důkaz.

K Větě XVIII.2:

- Tato věta říká, že za předpokladu, že
  - G je otevřená množina;
  - zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G;
  - $t_0 \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$, přičemž $[t_0, \boldsymbol{b}] \in G$;

  existuje aspoň jedno maximální řešení soustavy splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}$.

- Pro rovnice se separovanými proměnnými a lineární rovnice prvního řádu lze toto tvrzení dokázat pomocí metody řešení. (Důležitou roli přitom hraje věta o existenci primitivní funkce ke spojité funkci – Věta VIII.8.)

- Důkaz této věty provádět nebudeme, přesahuje rámec našeho kurzu.

  Jen ho krátce okomentujme:

  Nejprve se dokáže, že existuje řešení splňující počáteční podmínku definované na nějakém (možná velmi malém) intervalu obsahujícím bod t_0. Následně se použije obecný princip, který říká, že každé řešení lze prodloužit na maximální řešení.

  Přitom první část se udělá tak, že zkonstruujeme posloupnost „čím dál přesnějších přibližných řešení“ a ukážeme (s použitím spojitosti $\boldsymbol{f}$), že nějaká vybraná posloupnost konverguje k přesnému řešení.

- Tato věta říká, že za příslušných předpokladů existuje alespoň jedno maximální řešení. Neříká, kolik takových řešení existuje, jen že existuje alespoň jedno. Může jich existovat více, o čemž svědčí například příklady rovnic se separovanými proměnnými, v nichž lze nalepovat.

  Předpoklady, za kterých je řešení jednoznačné, řeší Věta XVII.3

K Větě XVII.3:

- Tato věta říká, že za předpokladu, že
  - G je otevřená množina;
  - zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G;
  - funkce $f_1, \ldots, f_n$ mají v každém bodě G parciální derivace podle druhé až $(n+1)$-té proměnné a tyto parciální derivace jsou navíc spojité na G;
  - $t_0 \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$, přičemž $[t_0, \boldsymbol{b}] \in G$;

  existuje právě jedno maximální řešení soustavy splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{b}$.

  Připomeňme, že funkce $f_1, \ldots, f_n$ jsou funkce $n+1$ proměnných – za první proměnnou se dosazuje t, za ostatní hodnoty neznámých funkcí $x_1, \ldots, x_n$.

  Jde tedy o parciální derivace (prvního řádu) podle všech proměnných s výjimkou první.

- Pro autonomní rovnice tato věta plyne z posledního Důsledku v oddílu XIV.2. Pro rovnice se separovanými proměnnými lze dokázat pomocí metody řešení s použitím Věty XIV.3(3).

- I důkaz této věty přesahuje rámec našeho kurzu, proto ho nebudeme provádět, pouze krátce okomentujeme.

  První a nejdůležitější krok je opět důkaz tvrzení pro nějaký (možná velmi malý) interval obsahující bod t_0. Zhruba řečeno se postupuje takto: Vezmeme vhodná čísla δ, ε dost malé a definujeme zobrazení

  $$\Phi : C(\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle, \overline{B(\boldsymbol{b}, \varepsilon)}) \to C(\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle, \mathbf{R}^n)$$

  předpisem

  $$\Phi(\boldsymbol{x})(t) = \boldsymbol{b} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds, \quad t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle, \boldsymbol{x} \in C(\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle, \overline{B(\boldsymbol{b}, \varepsilon)}).$$

  Nyní se ukáže, že zobrazení Φ má právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $\boldsymbol{x}$, pro které $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. To ovšem podle Větičky XVII.1 znamená, že $\boldsymbol{x}$ je řešením počáteční úlohy.

Z toho pak plyne jednak, že pro každou počáteční podmínku existuje aspoň jedno maximální řešení (máme řešení na malém intervalu, které lze prodloužit na maximální) a také to, že se řešení nemohou větvit.

Podrobnostmi se zabývat nebudeme.

- Z této věty plyne první část posledního tvrzení Kapitoly XV (existence a jednoznačnost řešení pro lineární rovnice prvního řádu). Zároveň jsme ho ovšem dokázali z metody řešení.

- Z této věty plyne rovněž část Věty XVI.1 o existence a jednoznačnost řešení řešení lineární rovnice s konstantními koeficienty, pokud tyto rovnice interpretujeme jako soustavu, jak to bylo zmíněno výše.

  Jak se v tomto případě Věta XVII.3 aplikuje, vysvětlíme v příštím oddílu u Věty XVII.4.