Komentář k oddílu XVII.2: Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

O obsahu tohoto oddílu, základní značení atp.:

- V předchozím oddílu jsme se zabývali obecnými soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu (vyřešenými vůči derivaci). V tomto oddílu se budeme zabývat důležitým speciálním případem – soustavami lineárních diferenciálních rovnic. V tomto případě je řada věcí jednodušších díky abstraktní teorii lineárních zobrazení (oddíl IX.2). Například se dá vcelku jednoduše popsat struktura množiny řešení.

- Soustavy, kterými se budeme zabývat v tomto oddílu, mají tvar

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{aligned} \tag{$*$}$$

  Zde $x_1, \dots, x_n$ jsou neznámé funkce. Dále, a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a b_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ jsou zadané funkce spojité na nějakém intervalu (α, β).

- Je zřejmé, že jde o speciální případ soustav z oddílu XVII.1. Při tam používaném značení máme

$$\begin{aligned} G &= (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n, \\ f_j(t, x_1, \dots, x_n) &= a_{j1}(t)x_1 + a_{j2}(t)x_2 + \cdots + a_{jn}(t)x_n + b_j(t), \\ &\qquad t \in (\alpha, \beta), [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

- I v tomto případě budeme používat vektorový tvar soustavy $(*)$, tj. zápis

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{$**$}$$

  kde $\mathbb{A}$ je maticová funkce a $\boldsymbol{b}$ je vektorová funkce. Tyto funkce jsou dány předpisem

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

pro $t \in (\alpha, \beta)$. Dále, $\boldsymbol{x}$ je opět neznámá vektorová funkce, kterou tentokrát zapisujeme ve formě sloupcového vektoru.

- Každé řešení soustavy $(*)$ je automaticky třídy C^1. Je to podobné jako v kapitolách XV a XVI nebo v důkazu Větičky XVII.1.

  Nechť totiž $\boldsymbol{x}$ je řešením na nějakém otevřeném intervalu I. Pak funkce $x_1, \dots, x_n$ mají v každém bodě intervalu I vlastní derivaci, a tedy jsou spojité. Navíc pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí

  $$x_j'(t) = a_{j1}(t)x_1(t) + a_{j2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{jn}(t)x_n(t) + b_j(t), \quad t \in I.$$

  Protože pravá strana je spojitá na I (vznikne aritmetickými operacemi ze spojitých funkcí), je x_j' také spojitá na I.

- Soustavy tvaru $(*)$ respektive $(**)$ jsou lineární, protože se dají vyjádřit pomocí vhodného lineárního zobrazení. Jde o zobrazení $L : C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n) \to C((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$ definované předpisem

  $$L(\boldsymbol{x})(t) = \boldsymbol{x}'(t) - \mathbb{A}(t) \cdot \boldsymbol{x}(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \boldsymbol{x} \in C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n),$$

  je lineární. To plyne z věty o aritmetice derivací a z vlastností maticového násobení.

K Větě XVII.4:

- Tato věta obsahuje dvě tvrzení. První tvrzení se týká existence a jednoznačnosti maximálního řešení. Druhé říká, že maximální řešení soustavy $(*)$ jsou definována na celém intervalu (α, β).

- První tvrzení plyne přímo z Věty XVII.3. Rozmysleme si, že jsou splněny předpoklady:

  - Množina $G = (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$ je zřejmě otevřená.
  - Funkce $f_1, \dots, f_n$ mají, jak je uvedeno výše, tvar
  $$f_j(t, x_1, \dots, x_n) = a_{j1}(t)x_1 + a_{j2}(t)x_2 + \dots + a_{jn}(t)x_n + b_j(t),$$
  a tedy jsou zřejmě spojité na G.
  - Pokud $j \in \{1, \dots, n\}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, pak
  $$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_n) = a_{ji}(t),$$
  což je funkce spojitá na G (na proměnných $x_1, \dots, x_n$ nezávisí).

  Tím jsme ověřili předpoklady Věty XVII.3, a tedy ji můžeme použít. To dává důkaz prvního tvrzení věty.

- Druhé tvrzení není samozřejmé, lze dokázat z Věty XVII.12 z oddílu XVII.4.

K Větičce XVII.5:

- Připomeňme, že soustava $(*)$ je homogenní, pokud všechny funkce $b_1, \dots, b_n$ jsou konstantní nulové funkce, neboli vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ je konstantní nula.

- Bod (i) říká, že maximální řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$.

  Výše jsme vysvětlili, že každé řešení je třídy C^1. Druhá část Věty XVII.4 říká, že každé maximální řešení je definované na celém intervalu (α, β). Proto je množina všech maximálních řešení podmnožinou $C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$.

  Že jde o vektorový podprostor, plyne z Věty IX.5, protože je to jádro lineárního zobrazení L.

- Bod (ii) pak plyne z Věty IX.6 aplikované na lineární zobrazení L.

Věta XVII.6, fundamentální matice a Věta XVII.7:

- Význam Věty XVII.6: Z Větičky XVII.5 víme, že množina všech řešení homogenní soustavy je vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$ (protože je to jádro lineárního zobrazení).

  K tomu Věta XVII.6 dodává, že tento podprostor má dimenzi n, tedy existuje báze, která má n prvků. Jde o podobné schéma jako ve Větě XII.2 a ve Větě XVI.3. I důkaz bude podobný.

  Podobně jako v kapitolách XII a XVI, i tentokrát nazýváme bázi prostoru řešení homogenní rovnice termínem fundamentální systém. Všechna řešení homogenní soustavy jsou pak lineární kombinace prvků fundamentálního systému.

- Důkaz Věty XVII.6: Postupujeme analogicky jako v kapitolách XII a XVI, jen nyní používáme Větu XVII.4.

  Důkaz opět rozdělíme do tří kroků:

Krok 1: Volba prvků báze. Zvolme nějaké $t_0 \in (\alpha,\beta)$.
Podle Věty XVII.4 existují vektorové funkce $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \dots, \boldsymbol{x}^n$, které jsou řešením homogenní soustavy a navíc splňují počáteční podmínky

$$\begin{array}{cccc} x_1^1(t_0) = 1, & x_2^1(t_0) = 0, & \dots & x_n^1(t_0) = 0, \\ x_1^2(t_0) = 0, & x_2^2(t_0) = 1, & \dots & x_n^1(t_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t_0) = 0, & x_2^n(t_0) = 0, & \dots & x_n^n(t_0) = 1, \end{array}$$

neboli

$$\boldsymbol{x}^1(t_0) = \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{x}^2(t_0) = \boldsymbol{e}^2, \dots, \boldsymbol{x}^n(t_0) = \boldsymbol{e}^n,$$

kde $\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n$ jsou kanonické bázové vektory v $\mathbf{R}^n$.
Ukážeme, že těchto n vektorových funkcí tvoří bázi prostoru řešení.

Krok 2: Vektorové funkce $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \dots, \boldsymbol{x}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažme lineární kombinaci těchto vektorových funkcí, která je rovna nulovému vektoru (tj. konstantní nulové vektorové funkci).

Neboli, mějme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taková, že

$$\alpha_1\boldsymbol{x}^1 + \alpha_2\boldsymbol{x}^2 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{o}.$$

Toto znamená, že

$$\forall t \in (\alpha, \beta)\colon \alpha_1\boldsymbol{x}^1(t) + \alpha_2\boldsymbol{x}^2(t) + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}^n(t) = \boldsymbol{o}. \qquad (\circ)$$

Speciálně, pokud do rovnosti $(\circ)$ dosadíme $t = t_0$, dostaneme, s použitím počátečních podmínek,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} =& \alpha_1\boldsymbol{x}^1(t_0) + \alpha_2\boldsymbol{x}^2(t_0) + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}^n(t_0) \\ =& \alpha_1\boldsymbol{e}^1 + \alpha_2\boldsymbol{e}^2 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{e}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tedy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Tedy ona lineární kombinace musí být triviální, což dokončuje důkaz lineární nezávislosti.

Krok 3: Každé řešení homogenní soustavy lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorových funkcí $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$.

Nechť $\boldsymbol{y}$ je libovolné řešení homogenní soustavy.

Uvažme vektorovou funkci

$$\boldsymbol{z} = y_1(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^1 + y_2(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^2 + \dots + y_n(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^n,$$

tj. vektorovou funkci, která je lineární kombinací vektorových funkcí $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ s koeficienty $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)$.

Protože vektorová funkce $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ jsou řešením homogenní rovnice a množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor (Větička XVII.5(i)), je i funkce $\boldsymbol{z}$ řešením homogenní rovnice (jakožto lineární kombinace řešení).

Navíc, když uvážíme počáteční podmínky, které splňují řešení $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$, vidíme, že

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t_0) &= y_1(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^1(t_0) + y_2(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^2(t_0) + \dots + y_n(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^n(t_0) \\ &= y_1(t_0) \cdot \boldsymbol{e}^1 + y_2(t_0) \cdot \boldsymbol{e}^2 + \dots + y_n(t_0) \cdot \boldsymbol{e}^n \\ &= \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(t_0).\end{aligned}$$

Tedy, vektorové funkce $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$ jsou obě řešením homogenní soustavy a navíc splňují stejné počáteční podmínky.

Z Věty XVII.4 nyní plyne, že se tato řešení rovnají, neboli $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$, tedy

$$\boldsymbol{y} = y_1(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^1 + y_2(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^2 + \dots + y_n(t_0) \cdot \boldsymbol{x}^n,$$

Tedy řešení $\boldsymbol{y}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorových funkcí $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \dots, \boldsymbol{x}^n$.

To dokončuje důkaz.

- Fundamentální matice je maticová funkce, jejíž sloupce jsou prvky fundamentálního systému.

  Přesněji: Nechť $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ je fundamentální systém řešení homogenní rovnice. Jsou to vektorové funkce, takže z nich můžeme vytvořit maticovou funkci, která má v prvním sloupci $\boldsymbol{x}^1$, ve druhém $\boldsymbol{x}^2$ atd.

  Tedy

$$\Phi(t) = (\boldsymbol{x}^1(t), \boldsymbol{x}^2(t), \dots, \boldsymbol{x}^n(t)) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

  pro $t \in (\alpha, \beta)$.

- Věta XVII.7 a její důkaz:

  Máme soustavu $(*)$ a předpokládejme, že $\Phi(t)$ je fundamentální matice homogenní soustavy.

  Označme sloupce fundamentální matice $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ – tyto vektorové funkce tedy tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

  (i): Tento bod říká, že vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ je řešením homogenní soustavy, právě když existuje $c \in \mathbf{R}^n$, pro které platí

  $$\forall t \in (\alpha, \beta)\colon \boldsymbol{x}(t) = \Phi(t) \cdot \boldsymbol{c}.$$

  To je ovšem téměř zřejmé. Protože $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice, je $\boldsymbol{x}$ řešením, právě když

  $$\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}\colon \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n.$$

  Když uvážíme, že z definice maticového násobení plyne

  $$\Phi(t) \cdot \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n(t)$$

  (viz například důkaz Věty VI.16), je tvrzení opravdu zřejmé.

  (ii): Tento bod říká, že pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je matice $\Phi(t)$ regulární.

  Důkaz provedeme sporem, podobně jako důkaz Větičky XVI.6.

  Předpokládejme, že existuje nějaké $t_0 \in (\alpha, \beta)$, pro které matice $\Phi(t_0)$ není regulární.

  To ovšem znamená, že existuje $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, pro které platí $\Phi(t_0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. (Pokud $\Phi(t_0)$ není regulární, pak lineární zobrazení reprezentované touto maticí není prosté – viz Věta VI.19 a následující poznámky, a tedy jeho jádro obsahuje nenulový vektor – viz Důsledek Věty IX.6.)

  Platí

  $$\Phi(t_0) \cdot \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}^1(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n(t_0)$$

  tedy rovnost $\Phi(t_0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ znamená

  $$c_1\boldsymbol{x}^1(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n(t_0) = \boldsymbol{o}$$

Pokud definujeme

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^1 + c_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n,$$

pak uvedená rovnost říká, že

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{o}.$$

Tedy $\boldsymbol{y}$ je řešení homogenní soustavu (jakožto lineární kombinace řešení), které splňuje stejné počáteční podmínky jako konstantní nulové řešení. Z Věty XVII.4 plyne, že dvě řešení splňující stejné počáteční podmínky, se rovnají, a proto $\boldsymbol{y}$ je konstantní nulová funkce.

To ovšem znamená, že

$$c_1\boldsymbol{x}^1 + c_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{o}.$$

Protože $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ jsou lineárně nezávislé, musí být $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, neboli $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$.

To je ale spor s volbou $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$.

Tento spor dokončuje důkaz.

Věta XVII.8 a její důkaz:

- Tato věta dává vzorec pro řešení nehomogenní soustavy za předpokladu, že známe fundamentální matici soustavy.

  Je to analogie vzorce pro lineární rovnice prvního řádu z Kapitoly XV (viz komentář ke zmíněné kapitole).

- Této větě říkáme „variace konstant“, protože vychází z podobného principu jako metoda variace konstanty z kapitoly XV a metoda variace konstant z oddílu XVI.3.

- Důkaz by se dal udělat tak, že se ověří, že uvedený vzorec má požadované vlastnosti. Budeme ale postupovat jinak – ukážeme si, jak se vzorec odvodí a proč je přirozený.

- Odvození provedeme v několika krocích:

  Krok 1: Nechť Φ je fundamentální matice homogenní soustavy, $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ jsou její sloupce. Pak $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

  Z Věty XVII.7(i) víme, že všechna řešení homogenní soustavy jsou tvaru
  $$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t) \cdot \boldsymbol{c},$$
  kde $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$.

  Idea variace konstant je (podobně jako v Kapitole XV a v oddílu XVI.3) hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru
  $$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t) \cdot \boldsymbol{c}(t), \qquad (\circ)$$
  kde $\boldsymbol{c}$ je vhodná vektorová funkce. Tento tvar dosadíme do soustavy $(**)$.

  Krok 2: K tomu potřebujeme spočítat derivaci vektorové funkce $\boldsymbol{x}$:

  Platí
  $$\boldsymbol{x}'(t) = \Phi'(t) \cdot \boldsymbol{c}(t) + \Phi(t) \cdot \boldsymbol{c}'(t). \qquad (\clubsuit)$$
  Tato rovnost plyne z definice maticového násobení a z pravidla pro derivaci součinu. Stačí si představit, jak maticové násobení funguje.

Pro ty, kdo si to nedokážou představit, je zde podrobný výpočet:
Máme

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\cdot\boldsymbol{c}(t) = c_1(t)\boldsymbol{x}^1(t)+\cdots+c_n(t)\boldsymbol{x}^n(t) = \begin{pmatrix} c_1(t)x_1^1(t) + \cdots + c_n(t)x_1^n(t) \\ \vdots \\ c_1(t)x_n^1(t) + \cdots + c_n(t)x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t)x_1^1(t) + \cdots + c_n'(t)x_1^n(t) + c_1(t)(x_1^1)'(t) + \cdots + c_n(t)(x_1^n)'(t) \\ \vdots \\ c_1'(t)x_n^1(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^n(t) + c_1(t)(x_n^1)'(t) + \cdots + c_n(t)(x_n^n)'(t) \end{pmatrix}$$

$$= c_1'(t)\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_n'(t)\boldsymbol{x}^n(t) + c_1(t)(\boldsymbol{x}^1)'(t) + \cdots + c_n(t)(\boldsymbol{x}^n)'(t)$$
$$= \Phi(t)\cdot\boldsymbol{c}'(t) + \Phi'(t)\cdot\boldsymbol{c}(t)$$

Krok 3: Protože Φ je fundamentální matice, platí

$$\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t). \qquad (\spadesuit)$$

Je totiž

$$\Phi(t) = (\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)),$$

a tedy

$$\Phi'(t) = ((\boldsymbol{x}^1)'(t), \ldots, (\boldsymbol{x}^n)'(t)) = (\mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}^n(t)) = \mathbb{A}(t)\Phi(t),$$

kde ve druhé rovnosti jsme použili fakt, že $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ jsou řešení homogenní soustavy.

Krok 4: Dosaďme nyní tvar $(\circ)$ do nehomogenní soustavy $(**)$. Díky $(\clubsuit)$ dostaneme

$$\Phi'(t)\boldsymbol{c}(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

První člen na levé straně upravíme pomocí $(\spadesuit)$ a dostaneme

$$\mathbb{A}(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t),$$

neboli

$$\Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{b}(t). \qquad (\heartsuit)$$

Krok 5: Protože $\Phi(t)$ je regulární matice pro každé t (Věta XVII.7(ii)), ($\heartsuit$) můžeme upravit na

$$\boldsymbol{c}'(t) = \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t). \qquad (\diamondsuit)$$

Poznámka o metodě řešení: Předchozí kroky nám dávají metodu nalezení partikulárního řešení nehomogenní soustavy za předpokladu, že známe fundamentální matici:

Řešení hledáme ve tvaru ($\circ$). Vektorová funkce $\boldsymbol{c}'$ musí splňovat ($\heartsuit$), což je soustava lineárních rovnic (s parametrem t). Tu vyřešíme (buď eliminací nebo použitím vzorečku ($\diamondsuit$)). Nyní spočítáme primitivní funkce k funkcím $c_1, \dots, c_n$. Ty dosadíme do ($\circ$) a máme řešení.

Dokončení důkazu – vzorec pro řešení počáteční úlohy: Hledáme řešení soustavy ($**$) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Postupujeme podobně jako v Kapitole XV:

Položme

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds.$$

Pak platí ($\diamondsuit$), tedy i ($\clubsuit$), a tedy

$$\boldsymbol{x}^p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds$$

je řešením nehomogenní rovnice. Navíc splňuje $\boldsymbol{x}^p(t_0) = 0$.

Všechna řešení nehomogenní rovnice mají tedy tvar

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{h} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds,$$

kde $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$. Pak

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t_0)\boldsymbol{h},$$

tedy, chceme-li, aby $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, musíme (a zároveň můžeme) zvolit

$$\boldsymbol{h} = \Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}^0.$$

Dostáváme tedy řešení ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds,$$

což je přesně tvar ze znění věty.