Komentář k oddílu XVII.3: Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty – metoda řešení

K obsahu a smyslu tohoto oddílu:

- V předchozím oddílu jsme si ukázali, jaký tvar má množina řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic – množina řešení homogenní soustavy je vektorový prostor, jehož dimenzi známe (je rovna n – počtu rovnic). A v případě, že známe fundamentální systém řešení homogenní soustavy, umíme najít řešení nehomogenní soustavy.

- Co ovšem v praxi neumíme, je najít fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

  Umíme to v případě, že jde o jednu rovnici (viz Kapitola XV), už pro soustavu dvou rovnic to obecně neumíme.

- V tomto oddílu se naučíme, jak najít fundamentální systém v případě, že maticová funkce $\mathbb{A}(t)$ je konstantní (nezávisí na t).

  Použijeme k tomu jednak λ-matice a jejich eliminaci a jednak metody z oddílu XVI.2.

- Soustavy, kterými se budeme zabývat v tomto oddílu, mají tedy tvar

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t), \\ &\ \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{$*$}$$

  kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé funkce, a_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ jsou zadaná reálná čísla (konstantní koeficienty) a b_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ jsou zadané funkce spojité na nějakém intervalu (α, β).

  Vektorový zápis je pak

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{$**$}$$

  kde $\boldsymbol{x}$ je neznámá vektorová funkce, $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n a $\boldsymbol{b}$ je zadaná vektorová funkce spojitá na intervalu (α, β).

λ-matice a Věta XVII.9:

- λ-matice jsou součástí metody řešení soustavy ($**$). Nyní se chvíli budeme věnovat pouze jim, vztah k řešení soustavy vysvětlíme později.

- λ-matice je matice, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ. Několik příkladů λ-matic typu 2×2:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda^3 - 2\lambda \\ 7 & 5\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^3 - 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Obyčejné matice, jejichž prvky jsou čísla, jsou speciálním případem λ-matic.

- Pro λ-matice také definujeme řádkové úpravy, které jsou podobné těm z Kapitoly VI:

  (a) Prohození dvou řádků.

  To je zcela stejné jako v Kapitole VI.

  (b) Vynásobení jednoho řádku nějakou nenulovou konstantou.

  Například: vynásobení prvního řádku číslem 7 nebo vynásobení druhého řádku číslem $-\frac{1}{2}$.

  Opět je to zcela analogické jako v Kapitole VI.

  (c) Přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

  Například: přičtení $(\lambda + 2)$-násobku druhého řádku k prvnímu řádku nebo přičtení $(\lambda^2 + 2\lambda - 1)$-násobku prvního řádku k třetímu řádku.

  To je opět podobné jako v Kaptiotole VI, ale zde je rozdíl v tom, že přičítáme „polynomiální násobek“.

- Upozornění: Třebaže jsou úpravy podobné jako v Kapitole VI, je zde určitý důležitý rozdíl:

  V úpravách třetího druhu můžeme přičítat polynomiální násobky, ale v úpravách druhého druhu můžeme řádek násobit pouze konstantnou.

  K zakázaným úpravám patří třeba násobení řádku λ nebo dělení řádku λ. To je klíčová věc, důvod pro to vysvětlíme později, při výkladu použití pro soustavy diferenciálních rovnic.

- Věta XVII.9 říká, že každou λ-matici můžeme nějakou posloupností řádkových úprav převést na schodovitou.

  Schodovitá λ-matice má stejnou definici i stejný význam jako schodovitá matice známá z Kapitoly VI – pro každý řádek (kromě prvního) platí, že je buď nulový nebo začíná více nulami než předchozí řádek.

  Důkaz je analogický důkazu Věty VI.5(i). Důkaz, který si ukážeme, je i v tomto případě návodem, jak úpravy provést.

- Důkaz Věty XVII.9:

  Mějme λ-matici
$$\mathbb{A} = (a_{ij}(\lambda))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}.$$
  Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu řádků λ-matice, tj podle m.

  Krok 1, $m = 1$: Pokud λ-matice má jen jeden řádek, už je schodovitá, takže není třeba nic dělat.

  Krok 2, $m \to m + 1$: Předpokládejme, že $m \in \mathbb{N}$ je takové, že tvrzení platí pro λ-matice o m řádcích. Nechť $\mathbb{A}$ je λ-matice o $m + 1$ řádcích, tedy typu $(m + 1) \times n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Budeme postupovat následovně:

  Pokud $\mathbb{A}$ je nulová λ-matice, je již schodovitá a jsme hotovi.

  Pokud $\mathbb{A}$ není nulová, najdeme nejmenší k, pro které k-tý sloupec není nulový.

  Nyní ukážeme, že

  řádkovými úpravami lze docílit situace,
  že $a_{1k}(\lambda)$ je nenulový polynom (♠)
  a $a_{ik}(\lambda) = 0$ pro $i = 2, \ldots, m + 1$.

  K tomu účelu se podívejme na polynomy v k-tém sloupci a označme r nejmenší stupeň, který má nějaký nenulový z nich. Formálně zapsáno
$$r = \min\{\text{stupeň}\, a_{ik}(\lambda) \colon i \in \{1, \ldots, m+1\}, a_{ik}(\lambda) \text{ není nulový polynom}\}.$$
  Tvrzení (♠) dokážeme indukcí podle r. (r je dobře definováno nezáporné celé číslo, protože aspoň jeden z uvedených polynomů je nenulový.)

Krok 1, $r = 0$**:** Pokud $r = 0$, znamená to, že existuje takové i, že $a_{ik}(\lambda)$ je nenulový polynom stupně 0, tedy nenulová konstanta.
Pokud přehodíme první a i-tý řádek, dosáhneme toho, že na místě $1k$ je nenulová konstanta.
Můžeme tedy předpokládat, že a_{1k} je nenulová konstanta. Pak postupně pro $j = 2, \ldots, m + 1$ k j-tému řádku přičteme $(-\frac{1}{a_{1k}} a_{jk}(\lambda))$-násobek prvního řádku. Protože a_{1k} je nenulová konstanta, jsou to přípustné úpravy třetího druhu.
Tím jsme docíli stavu popsaného v (♠) a důkaz prvního kroku je hotov.

Krok 2, $r - 1 \to r$**:** Předpokládejme, že $r \geq 1$ a že (♠) platí v případě, že v k-tém sloupci existuje nenulový polynom stupně menšího než r.
Podle definice r existuje $i \in \{1, \ldots, m + 1\}$, že $a_{ik}(\lambda)$ je polynom stupně r.
Pokud přehodíme první a i-tý řádek, dosáhneme toho, že na místě $1k$ je polynom stupně r.
Můžeme tedy předpokládat, že $a_{1k}(\lambda)$ je polynom stupně r.
Nyní pro $i = 2, \ldots, k$ provedeme následující postup:

Vydělíme (se zbytkem) polynom $a_{ik}(\lambda)$ polynomem $a_{1k}(\lambda)$, tj. najdeme polynomy $p_i(\lambda)$ a $q_i(\lambda)$ splňující

$$a_{ik}(\lambda) = p_i(\lambda) a_{1k}(\lambda) + q_i(\lambda),$$

přičemž polynom $q_i(\lambda)$ je buď nulový nebo má stupeň menší než je stupeň polynomu $a_{1k}(\lambda)$. (Viz Věta VIII.17, která říká, že toto lze provést.)
Pak k i-tému řádku přičteme $-p_i(\lambda)$-násobek prvního řádku. To je přípustná úprava třetího druhu.
Po této úpravě bude na místě ik polynom $q_i(\lambda)$.

Když uvedený postup provedeme pro $i = 2, \ldots, m+1$, budeme mít v k-tém sloupci polynomy $a_{1k}(\lambda), q_2(\lambda), \ldots, q_{m+1}(\lambda)$.

Nyní jsou dvě možnosti:

Buď jsou všechny polynomy $q_2(\lambda), \ldots, q_{m+1}(\lambda)$ nulové. Pak už jsme dosáhli stavu požadovaného v ($\spadesuit$).

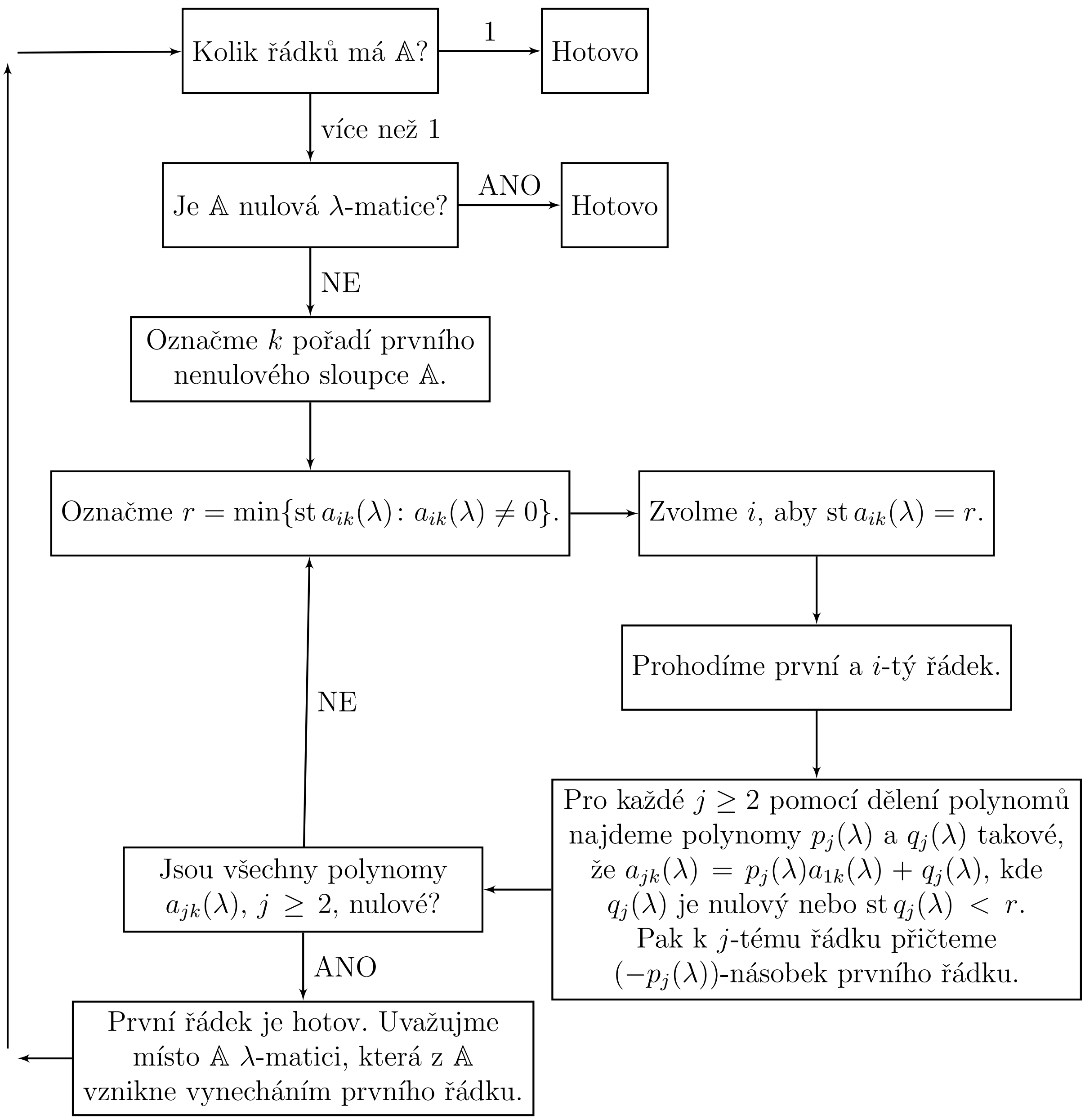
Nebo je alespoň jeden z polynomů $q_2(\lambda), \ldots, q_{m+1}(\lambda)$ nenulový. Pak má stupeň menší než je stupeň $a_{1k}(\lambda)$, tedy menší než r. Podle indukčního předpokladu v tomto případě ($\spadesuit$) platí.

Tím je dokočen indukční krok.

Dosáhli jsme tedy toho, že v k-tém sloupci je první prvek nenulový polynom a všechny ostatní prvky jsou nulové. Vytvořili jsme tedy „první schod“.

Nyní použijeme indukční předpoklad: λ-matici typu $m \times n$, která vznikne vynecháním prvního řádku z výsledné λ-matice, lze dle indukčního předpokladu pomocí řádkových úprav převést na schodovitou. To provedeme a pak opět přidáme vynechaný první řádek, čímž dostameme schodovitou λ-matici. Tím je důkaz proveden.

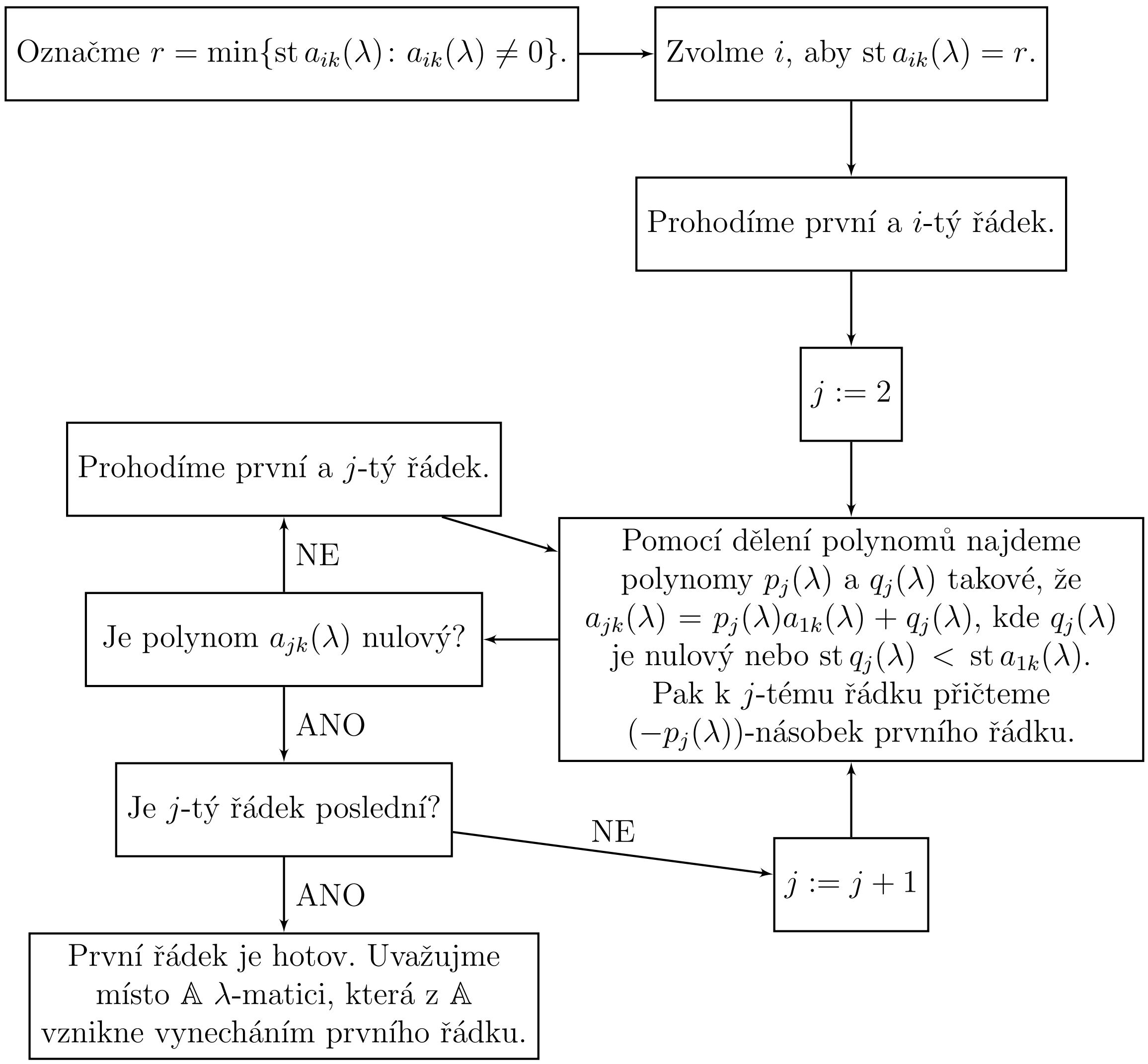
- Následující diagram zachycuje algoritmus vycházející z uvedeného důkazu indukcí.



- Při praktickém počítání si tento algoritmus můžeme upravit, aby se výpočet zkrátil. Například v kroku, kde dělíme polynomy, lze dělení provádět jen do chvíle, kdy nám poprvé vyjde zbytek $q_j(\lambda)$ nenulový.

Pak můžeme prohodit první a j-tý řádek a dělit polynomem menšího stupně.

Pak příslušná část algoritmu vypadá takto:



Metoda řešení homogenní soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$:

- Metodu si vysvětlíme obecně a zároveň ilustrujeme na konkrétním příkladu

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 9 & 9 & -24 \\ -1 & 5 & 4 & 4 & -12 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- První krok metody spočívá v tom, že vezmeme λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a pomocí řádkových úprav ji převedeme na schodovitou.

  V našem konkrétním případě to vypadá následovně:

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -9 & -9 & -9 & 24 \\ 1 & \lambda-5 & -4 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-5 & -4 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ \lambda+2 & -9 & -9 & -9 & 24 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & -3 & \lambda-6 & 14 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 & \lambda^2-13 & 2\lambda+28 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 & \lambda^2-13 & 2\lambda+28 \\ 0 & \lambda-4 & -3 & \lambda-6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -\lambda+2 & \lambda^2-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

  Úpravy byly následující:

  - Nejprve jsme prohodili první a čtvrtý řádek.
  - Pak jsme první řádek přičetli k druhému i k třetímu řádku. Ke čtvrtému řádku jsme přičetli $(\lambda+2)$-násobek prvního řádku.
  - Prohodili jsme druhý a pátý řádek.
  - Ke čtvrtému řádku jsme přičetli $(\lambda-7)$-násobek druhého a k pátému řádku jsme přičetli $(\lambda-4)$-násobek druhého.
  - K pátému řádku jsme přičetli třetí řádek.

- Než se budeme zabývat dalším postupem, vysvětlíme význam tohoto zápisu a úprav.

  Řešíme soustavu $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$, neboli $\boldsymbol{x}' - \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Když tento vektorový zápis rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1' - a_{11}x_1 & -a_{12}x_2 & -\dots & & -a_{1n}x_n & = 0, \\ -a_{21}x_1 & +x_2' - a_{22}x_2 & -\dots & & -a_{2n}x_n & = 0, \\ & & \vdots & & & \\ -a_{n1}x_1 & -a_{n2}x_2 & -\dots & +x_n' & - a_{nn}x_n & = 0. \end{array}$$

  Trik, který vede k použití λ-matic, spočívá v tom, že „operátor derivování reprezentujeme pomocí násobení λ“.

  Pokud tedy místo derivování píšeme násobení λ, má levá strana uvedené soustavy tvar

$$\begin{array}{rrrrr} \lambda x_1 - a_{11}x_1 & -a_{12}x_2 & -\dots & & -a_{1n}x_n \\ -a_{21}x_1 & +\lambda x_2 - a_{22}x_2 & -\dots & & -a_{2n}x_n \\ & & \vdots & & \\ -a_{n1}x_1 & -a_{n2}x_2 & -\dots & +\lambda x_n & - a_{nn}x_n, \end{array}$$

  neboli $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{x}$.

  Řádkové úpravy λ-matice pak reprezentují úpravy soustavy diferenciálních rovnic. Lze samozřejmě dvě rovnice prohodit nebo jednu rovnici vynásobit nenulovým číslem. Tyto úpravy nemění množinu řešení.

  Nakonec poslední typ úpravy: Pokud například k druhému řádku přičteme λ-násobek prvního, znamená to, že k druhé rovnici přičteme derivaci první rovnice. Ani takováto úprava nezmění množinu řešení soustavy.

  Mohli bychom tedy používat eliminaci přímo na diferenciální rovnici, bez použití λ-matic. Ale λ-matice umožňují počítat snadněji a efektivněji.

- Předchozí vysvětlení zároveň dokumentuje, proč některé úpravy nejsou dovolené. Například vynásobit jeden řádek λ by znamenalo příslušnou rovnici zderivovat. To není ekvivalentní úprava, protože to zvětšuje množinu řešení. Naopak, vydělit řádek λ by znamenalo něco jako zintegrovat rovnici – ale pak by na pravé straně již nebyla nula, ale nějaká konstanta.

- Nyní zpátky k metodě řešení. λ-matici $\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A}$ jsme pomocí řádkových úprav převedli na schodovitou. Protože jde o čtvercovou λ-matici, je schodovitá λ-matice automaticky horní trojúhelníková, má tedy tvar

  $$\mathbb{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

  kde $P_{ij}(\lambda)$ jsou polynomy.

  Navíc polynomy na diagonále, tj. $P_{11}(\lambda),\dots,P_{nn}(\lambda)$ jsou nenulové a součet jejich stupňů je n.

  Abychom si to rozmysleli, připomeňme nejprve Větu VI.10 o determinantu a řádkových úpravách. Z ní plyne, že při úpravě prvního druhu se determinant vynásobí -1, při úpravě druhého druhu se vynásobí nenulovým číslem a při úpravě třetího druhu se determinant nezmění.

  Z toho plyne, že existuje $c\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, že

  $$\det\mathbb{B}(\lambda)=c\cdot\det(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A}).$$

  Protože $\det(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})$ je polynom stupně n (podle Větičky IX.18(ii)), je i $\det\mathbb{B}(\lambda)$ polynom stupně n. Protože

  $$\det\mathbb{B}(\lambda)=P_{11}(\lambda)\cdots P_{nn}(\lambda)$$

  (podle Věty VI.8), musí být polynomy na diagonále nenulové a součet jejich stupňů musí být n.

  V našem konkrétním případě máme

  $$\mathbb{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix},$$

  tedy $P_{11}=P_{22}=-1$ jsou stupně 0, $P_{33}(\lambda)=\lambda-1$ je stupně 1, $P_{44}(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$ je stupně 2 a $P_{55}(\lambda)=\lambda^2+1$ je stupně 2. Součet stupňů je opravdu $5=0+0+1+2+2$.

- Získanou horní trojúhelníkovou matici $\mathbb{B}(\lambda)$ převedeme znovu na soustavu diferenciálních rovnic.

  K tomu použijeme následující značení:

  Pokud $P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a x nějaká funkce, pak budeme značit

  $$P(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x = a_k x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x.$$

  V souladu s tím, že λ zastupuje „operátor derivování“, λ matice $\mathbb{B}(\lambda)$ představuje soustavu diferenciálních rovnic

  $$\begin{array}{ccccccl} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = 0 \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = 0. \end{array}$$

  V našem konkrétním případě má příslušná soustava tvar

  $$\begin{array}{rrrrrl} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4' - 2x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5' + 4x_5 & = 0 \\ & & x_3' - x_3 & +x_4' - 2x_4 & +3x_5 & = 0 \\ & & & x_4'' - 2x_4' + x_4 & x_5'' - x_5' & = 0 \\ & & & & x_5'' + x_5 & = 0. \end{array}$$

- Tuto soustavu řešíme odzadu:

  - Poslední rovnice obsahuje pouze jednu neznámou funkci, a to x_n.

    Pokud by polynom P_{nn} byl stupně 0, tedy nenulová konstanta, pak by to nebyla ani diferenciální rovnice a vyšlo by $x_n = 0$, tj. x_n by byla konstantní nulová funkce. To ovšem nemůže nastat, protože by pak poslední řádek fundamentální matice byl nulový, což je ve sporu s Větou XVII.7(ii).

    Pokud je P_{nn} polynom stupně $k \geq 1$, pak poslední rovnice je homogenní lineární rovnice řádu k s konstatními koeficienty. Vyřešíme ji tedy pomocí Věty XVI.4 (jejím charakteristickým polynomem je P_{nn}).

V našem případě má poslední rovnice tvar

$$x_5'' + x_5 = 0,$$

což je homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom je $\chi(\lambda) = P_{55}(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Jeho kořeny jsou $\pm i$ (násobnosti jedna), tedy podle Věty XVI.4 je fundamentální systém tvořen funkcemi $\cos t, \sin t$. Obecné řešení má tedy tvar

$$x_5(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad t \in \mathbf{R} \ (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \tag{x_5}$$

– Předposlední rovnici přepíšeme ve tvaru

$$P_{n-1,n-1}(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_{n-1} = -P_{n-1,n}(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n.$$

Funkci x_n už známe z řešení poslední rovnice. Obecný tvar x_n dosadíme do pravé strany, čímž dostaneme rovnici s neznámou x_{n-1} (s parametrem či parametry, které se objevují ve vzorci pro x_n).

Pokud polynom $P_{n-1,n-1}$ je stupně 0, tj. je to nenulová konstanta, nejde o diferenciální rovnici, ale dostaneme přímo vzorec pro x_{n-1}. (To se tentokrát stát může.)

Pokud polynom $P_{n-1,n-1}$ je stupně 1, je to lineární rovnice prvního řádu s neznámou x_{n-1}. V tomto případě je nejsnazší použít metodu integračního faktoru z Kapitoly XV. (Lze použít i metody z Kapitoly XVI jako v následujícím případě, ale je to složitější a delší postup.)

Pokud polynom $P_{n-1,n-1}$ je stupně $k \geq 2$, je to nehomogenní lineární rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou x_{n-1}. Tu vyřešíme metodami z oddílu XVI.2: Najdeme fundamentální systém homogenní rovnice (podle Věty XVI.4), partikulární řešení nehomogenní rovnice získáme podle Věty XVI.5, protože pravá strana je součtem několika „speciálních pravých stran“.

V našem konkrétním případě předposlední rovnice má tvar

$$x_4'' - 2x_4' + x_4 = -x_5'' + x_5'.$$

Za x_5 dosadíme podle (x_5). Jest

$$\begin{aligned} x_5(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ x_5'(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \\ x_5''(t) &= -c_1 \cos t - c_2 \sin t, \end{aligned}$$

tedy

$$-x_5'' + x_5' = (c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t,$$

máme tedy rovnici

$$x_4'' - 2x_4' + x_4 = (c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t.$$

To je nehomogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana je ve speciálním tvaru z Věty XVI.5 (se dvěma parametry c_1, c_2). Vyřešíme ji metodami z Kapitoly XVI.

Charakteristický polynom homogenní rovnice je

$$\chi(\lambda) = P_{44}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

má tedy dvojnásobný kořen 1. Fundamentální systém řešení homogenní rovnice tedy tvoří funkce e^t, te^t (podle Věty XVI.4).

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme pomocí Věty XVI.5. Pravá strana je ve speciálním tvaru – je $\mu = 0$, $\nu = 1$, $P(t) = c_1 + c_2$, $Q(t) = c_1 - c_2$ (při značení z této věty). Protože $0 + 1 \cdot i = i$ není kořenem charakteristického polynomu a polynomy P, Q jsou konstantní (stupně 0), existuje partikulární řešení ve tvaru

$$x_{4,p}(t) = a\cos t + b\sin t,$$

kde $a, b \in \mathbf{R}$ jsou vhodné konstanty. Pak

$$\begin{aligned} x_{4,p}'(t) &= -a\sin t + b\cos t, \\ x_{4,p}''(t) &= -a\cos t + -b\sin t, \end{aligned}$$

tedy

$$x_{4,p}''(t) - 2x_{4,p}'(t) + x_{4,p}(t) = -2b\cos t + 2a\sin t.$$

Toto se rovná pravé straně v případě, že $a = \frac{c_2 - c_1}{2}$ a $b = -\frac{c_1 + c_2}{2}$. Partikulární řešení má tedy tvar

$$x_{4,p}(t) = \frac{c_2 - c_1}{2}\cos t - \frac{c_1 + c_2}{2}\sin t,$$

obecné řešení je pak

$$x_4(t) = c_3 e^t + c_4 te^t + \frac{c_2 - c_1}{2}\cos t - \frac{c_1 + c_2}{2}\sin t, \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (x_4)$$

Zde $c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ jsou nové parametry, c_1, c_2 jsou parametry z tvaru x_5.

– Analogicky vyřešíme všechny rovnice, postupujíce odzadu (od poslední k první).

V našem případě má třetí rovnice tvar

$$x_3' - x_3 = -x_4' + 2x_4 - 3x_5.$$

Za x_4 dosadíme z (x_4) a za x_5 dosadíme z (x_5). Protože

$$x_4'(t) = c_3 e^t + c_4 e^t + c_4 t e^t - \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t - \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t,$$

je pravá strana rovna

$$\begin{aligned} -x_4' + 2x_4 - 3x_5 &= -(c_3 + c_4)e^t - c_4 t e^t + \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t \\ &\quad + 2c_3 e^t + 2c_4 t e^t + (c_2 - c_1) \cos t - (c_1 + c_2) \sin t \\ &\quad - 3c_1 \cos t - 3c_2 \sin t \\ &= (c_4 - c_3)e^t + c_4 t e^t + (\tfrac{3}{2}c_2 - \tfrac{7}{2}c_1) \cos t - (\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{7}{2}c_2) \sin t. \end{aligned}$$

Máme tedy rovnici

$$x_3' - x_3 = (c_4 - c_3)e^t + c_4 t e^t + (\tfrac{3}{2}c_2 - \tfrac{7}{2}c_1) \cos t - (\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{7}{2}c_2) \sin t.$$

To je lineární rovnice prvního řádu, kterou můžeme řešit například metodou integračního faktoru z Kapitoly XV.

Integrační faktor je zřejmě funkce e^{-t}. Vynásobíme-li jím rovnici, dostaneme

$$x_3' e^{-t} - x_3 e^{-t} = (c_4 - c_3) + c_4 t + (\tfrac{3}{2}c_2 - \tfrac{7}{2}c_1)e^{-t} \cos t - (\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{7}{2}c_2)e^{-t} \sin t,$$

neboli

$$(x_3 e^{-t})' = (c_4 - c_3) + c_4 t + (\tfrac{3}{2}c_2 - \tfrac{7}{2}c_1)e^{-t} \cos t - (\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{7}{2}c_2)e^{-t} \sin t.$$

Nyní je třeba spočítat primitivní funkci k pravé straně. K tomu je třeba vypočítat

$$\begin{aligned} \int e^{-t} \cos t \, dt &= -e^{-t} \cos t - \int -e^{-t}(-\sin t) \, dt \\ &= -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \sin t \, dt \\ &= -e^{-t} \cos t - \left(-e^{-t} \sin t - \int -e^{-t} \cos t \, dt \right) \\ &= -e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t - \int e^{-t} \cos t \, dt, \end{aligned}$$

tedy

$$\int e^{-t} \cos t \, dt \overset{c}{=} \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - \cos t) \quad \text{na } \mathbf{R}.$$

Podobně

$$\begin{aligned}\int e^{-t}\sin t\,dt &= -e^{-t}\sin t - \int -e^{-t}\cos t\,dt\\ &= -e^{-t}\sin t + \int e^{-t}\cos t\,dt\\ &= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int -e^{-t}(-\sin t)\,dt\\ &= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\sin t\,dt,\end{aligned}$$

tedy

$$\int e^{-t}\sin t\,dt \overset{c}{=} -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) \quad \text{na } \mathbf{R}.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}x_3e^{-t} = (c_4 - c_3)t + \frac{1}{2}c_4t^2 + \frac{1}{4}(3c_2 - 7c_1)e^{-t}(\sin t - \cos t)\\ + \frac{1}{4}(3c_1 + 7c_2)e^{-t}(\cos t + \sin t) + c_5,\end{aligned}$$

kde $c_5 \in \mathbf{R}$. Tedy

$$\begin{aligned}x_3(t) &= (c_4 - c_3)te^t + \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{4}(3c_2 - 7c_1)(\sin t - \cos t)\\ &\quad + \frac{1}{4}(3c_1 + 7c_2)(\cos t + \sin t) + c_5e^t\\ &= c_5e^t + (c_4 - c_3)te^t + \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(2c_2 + 5c_1)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2 - 2c_1)\sin t.\end{aligned}$$

Toto je obecné řešení třetí rovnice – parametr c_5 je nově přidaný, parametry $c_1, \ldots, c_4$ pocházejí ze čtvrté a páté rovnice.
Druhá rovnice již není diferenciální rovnicí, ale dává přímo vzorec pro x_2 pomocí x_3, x_4, x_5, do něhož stačí dosadit:

$$\begin{aligned}x_2 &= -x_3 - 2x_4 + x_5' + 4x_5\\ &= -c_5e^t - (c_4 - c_3)te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t - \frac{1}{2}(2c_2 + 5c_1)\cos t - \frac{1}{2}(5c_2 - 2c_1)\sin t\\ &\qquad - 2c_3e^t - 2c_4te^t - (c_2 - c_1)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t\\ &\qquad - c_1\sin t + c_2\cos t + 4c_1\cos t + 4c_2\sin t\\ &= -(c_5 + 2c_3)e^t - (3c_4 - c_3)te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(5c_1 - 2c_2)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2 + 2c_1)\sin t\end{aligned}$$

Podobně první rovnice dává rovnou vzorec pro x_1:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 + x_3 + x_4' - 2x_4 + 2x_5 \\
&= -(c_5+2c_3)e^t - (3c_4-c_3)te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(5c_1-2c_2)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2+2c_1)\sin t \\
&\quad + c_5e^t + (c_4-c_3)te^t + \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(2c_2+5c_1)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2-2c_1)\sin t \\
&\quad + c_3e^t + c_4e^t + c_4te^t - \frac{1}{2}(c_2-c_1)\sin t + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\cos t \\
&\quad - 2c_3e^t - 2c_4te^t - (c_2-c_1)\cos t + (c_1+c_2)\sin t \\
&\quad + 2c_1\cos t + 2c_2\sin t \\
&= (c_4-3c_3)e^t - 3c_4te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(13c_1-c_2)\cos t + \frac{1}{2}(3c_1+15c_2)\sin t.
\end{aligned}$$

- Tímto postupem získáme obecné řešení homogenní soustavy. Bude se v něm vyskytovat n parametrů (pokud je P_{jj} stupně k, je příslušná diferenciální rovnice k-tého řádu a její řešení obsahuje k parametrů – podle Věty XVI.3). Proto řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^1 + c_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n, \quad c_1,\dots,c_n \in \mathbf{R},$$

kde $\boldsymbol{x}^1,\dots,\boldsymbol{x}^2$ jsou vhodné vektorové funkce. Ty pak tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

Pokud shrneme výsledky výpočtů, obecné řešení soustavy má tvar

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (c_4-3c_3)e^t - 3c_4te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(13c_1-c_2)\cos t + \frac{1}{2}(3c_1+15c_2)\sin t, \\
x_2(t) &= -(c_5+2c_3)e^t - (3c_4-c_3)te^t - \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(5c_1-2c_2)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2+2c_1)\sin t, \\
x_3(t) &= c_5e^t + (c_4-c_3)te^t + \frac{1}{2}c_4t^2e^t + \frac{1}{2}(2c_2+5c_1)\cos t + \frac{1}{2}(5c_2-2c_1)\sin t, \\
x_4(t) &= c_3e^t + c_4te^t + \frac{c_2-c_1}{2}\cos t - \frac{c_1+c_2}{2}\sin t, \\
x_5(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t,
\end{aligned}$$

kte $t \in \mathbf{R}$ (řešení jsou definována na $\mathbf{R}$) a $c_1,\dots,c_5 \in \mathbf{R}$ jsou libovolná.

Pokud chceme určit (nějaký) fundamentální systém a (nějakou) fundamentální matici, postupujeme následovně. Máme

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_4-3c_3)e^t-3c_4te^t-\frac{1}{2}c_4t^2e^t+\frac{1}{2}(13c_1-c_2)\cos t+\frac{1}{2}(3c_1+15c_2)\sin t\\-(c_5+2c_3)e^t-(3c_4-c_3)te^t-\frac{1}{2}c_4t^2e^t+\frac{1}{2}(5c_1-2c_2)\cos t+\frac{1}{2}(5c_2+2c_1)\sin t\\c_5e^t+(c_4-c_3)te^t+\frac{1}{2}c_4t^2e^t+\frac{1}{2}(2c_2+5c_1)\cos t+\frac{1}{2}(5c_2-2c_1)\sin t\\c_3e^t+c_4te^t+\frac{c_2-c_1}{2}\cos t-\frac{c_1+c_2}{2}\sin t\\c_1\cos t+c_2\sin t\end{pmatrix}$$

$$=c_1\cdot\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\cos t+\frac{3}{2}\sin t\\\frac{5}{2}\cos t+\sin t\\\frac{5}{2}\cos t-\sin t\\-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}\frac{15}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\\frac{5}{2}\sin t-\cos t\\\cos t+\frac{5}{2}\sin t\\\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\\sin t\end{pmatrix}+c_3\cdot\begin{pmatrix}-3e^t\\-e^t(2-t)\\-te^t\\e^t\\0\end{pmatrix}$$

$$+c_4\cdot\begin{pmatrix}e^t(1-3t-\frac{1}{2}t^2)\\-e^t(3t+\frac{1}{2}t^2)\\e^t(t+\frac{1}{2}t^2)\\te^t\\0\end{pmatrix}+c_5\cdot\begin{pmatrix}0\\-e^t\\e^t\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém tedy tvoří (například) pětice vektorových funkcí

$$\boldsymbol{x}^1(t)=\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\cos t+\frac{3}{2}\sin t\\\frac{5}{2}\cos t+\sin t\\\frac{5}{2}\cos t-\sin t\\-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\\cos t\end{pmatrix},\boldsymbol{x}^2(t)=\begin{pmatrix}\frac{15}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\\\frac{5}{2}\sin t-\cos t\\\cos t+\frac{5}{2}\sin t\\\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\\\sin t\end{pmatrix},\boldsymbol{x}^3(t)=\begin{pmatrix}-3e^t\\-e^t(2-t)\\-te^t\\e^t\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^4(t)=\begin{pmatrix}e^t(1-3t-\frac{1}{2}t^2)\\-e^t(3t+\frac{1}{2}t^2)\\e^t(t+\frac{1}{2}t^2)\\te^t\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{x}^5(t)=\begin{pmatrix}0\\-e^t\\e^t\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Víme totiž, že množina všech řešení je podprostor dimenze 5 a že řešení jsou právě lineární kombinace těchto pěti vektorových funkcí. Podle Větičky IX.4 tedy tvoří bázi.

Fudamentální matice je pak například

$$\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\cos t+\frac{3}{2}\sin t&\frac{15}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t&-3e^t&e^t(1-3t-\frac{1}{2}t^2)&0\\\frac{5}{2}\cos t+\sin t&\frac{5}{2}\sin t-\cos t&-e^t(2-t)&-e^t(3t+\frac{1}{2}t^2)&-e^t\\\frac{5}{2}\cos t-\sin t&\cos t+\frac{5}{2}\sin t&-te^t&e^t(t+\frac{1}{2}t^2)&e^t\\-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t&\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t&e^t&te^t&0\\\cos t&\sin t&0&0&0\end{pmatrix}$$

- Uvedený algoritmus je univerzální, jeho použití v praktickém počítání má však určitá omezení. Ta jsou dána tím, že je třeba hledat kořeny polynomů P_{ii}, což pro polynomy vyšších stupňů obecně neumíme. Na tuto potíž naráží všechny metody řešení (a také metody řešení jiných druhů rovnic – diferenčních v Kapitole XII a lineárních rovnic s konstantními koeficienty v Kapitole XVI). Existují i jiné metody řešení, které dají rovnou vzorec pro fundamentální matici (viz doplňující cvičení, až budou k dispozici) – ty jsou však důležité hlavně z teoretického hlediska, při použití v početní praxi narážejí na stejné potíže.

Metody řešení nehomogenní soustavy $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$:

- První možností je nejprve najít fundamentální systém řešení homogenní soustavy (výše uvedenou metodou) a pak najít partikulární řešení nehomogenní soustavy metodou variace konstant (Věta XVII.8).

  Pak všechna řešení nehomogenní soustavy se najdou jako součet tohoto partikulárního řešení a řešení homogenní soustavy, tj. lineární kombinace prvků fundamentálního systému (viz Větička XVII.5(ii)).

  Tato možnost je univerzální, je použitelná pro každou (spojitou) pravou stranu.

- Druhou možností, která je použitelná například v případě, že na pravé straně jsou funkce třídy C^∞, a která se hodí v případě, že funkce na pravé straně mají tvar jako ve Větě XVI.5, je zahrnutí pravé strany do eliminace.

  Postup je následující:

  - První krok metody tentokrát spočívá v tom, že vezmeme rozšířenou λ-matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}|\boldsymbol{b}(t))$ typu $n \times (n+1)$ a pomocí řádkových úprav ji převedeme na schodovitou.

    S proměnnou t, která se vyskytuje na pravé straně, zacházíme jako s parametrem.

    Postupujeme tak, že λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ převádíme na schodovitou podle výše uvedeného algoritmu, jen úpravy provádíme na celou matici, včetně posledního sloupce.

– Výsledkem úprav je λ-matice tvaru

$$(\mathbb{B}(\lambda)|\boldsymbol{b}'(\lambda,t)) = \begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(t,\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(t,\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(t,\lambda) \end{pmatrix},$$

kde funkce f_j mají tvar

$$f_j(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{k_j} \lambda^i g_{ij}(t),$$

přičemž g_{ij} jsou nějaké funkce. (Je zřejmé, že úpravami vznikne výraz tohoto tvaru.)

– Získanou schodovitou λ-matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic. Ta bude mít tvar

$$\begin{array}{lllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + \; \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \widetilde{f}_1(t) \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_2 & + \; \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \widetilde{f}_2(t) \\ & & \quad \vdots & & \\ & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})x_n & = \widetilde{f}_n(t). \end{array}$$

Levá strana má stejný tvar jako výše u řešení homogenní soustavy. Funkce na pravé straně jsou

$$\widetilde{f}_j(t) = \sum_{i=0}^{k_j} g_{ij}^{(i)}(t),$$

v souladu s interpretací λ jako „operátoru derivování“.

– Takto vzniklá soustava má stejnou množinu řešení jako výchozí soustava. Opět ji řešíme odzadu stejně jako výše, jen na pravé straně máme navíc funkce $\widetilde{f}_j(t)$.

– Ilustrujme tento postup na příkladu. Použijeme stejnou matici jako výše, avšak s nenulovou stranou.
Tedy uvažme rovnici $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 9 & 9 & -24 \\ -1 & 5 & 4 & 4 & -12 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ e^t \\ -e^t \\ t \end{pmatrix}$$

Úpravy pak vypadají takto:

$$(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}|\boldsymbol{b}(t)) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -9 & -9 & -9 & 24 & t^3 \\ 1 & \lambda-5 & -4 & -4 & 12 & t^2 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & e^t \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 1 & \lambda-5 & -4 & -4 & 12 & t^2 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & e^t \\ \lambda+2 & -9 & -9 & -9 & 24 & t^3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 0 & \lambda-4 & -3 & \lambda-6 & 14 & t^2-e^t \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 & \lambda^2-13 & 2\lambda+28 & t^3-(\lambda+2)e^t \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & \lambda-7 & \lambda^2-13 & 2\lambda+28 & t^3-(\lambda+2)e^t \\ 0 & \lambda-4 & -3 & \lambda-6 & 14 & t^2-e^t \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & t^3-(\lambda+2)e^t+(\lambda-7)t \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -\lambda+2 & \lambda^2-2 & t^2-e^t+(\lambda-4)t \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \lambda-2 & 2 & -e^t \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \lambda+4 & t \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & t^3-(\lambda+2)e^t+(\lambda-7)t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2+1 & t^2-e^t+(\lambda-4)t \end{pmatrix}$$

Nyní tuto λ-matici opět přepíšeme na soustavu. V prvních třech řádcích se v posledním sloupci nevyskytuje λ, proto tyto funkce budou samy na pravé straně.
Máme

$$f_4(t,\lambda) = t^3 - (\lambda+2)e^t + (\lambda-7)t = t^3 - 2e^t - 7t + \lambda(-e^t + t),$$

tedy

$$\widetilde{f}_4(t) = t^3 - 2e^t - 7t + (-e^t + t)' = t^3 - 2e^t - 7t + (-e^t + 1) = t^3 - 7t + 1 - 3e^t.$$

Podobně

$$f_5(t,\lambda) = t^2 - e^t + (\lambda - 4)t = t^2 - 4t - e^t + \lambda t,$$

tedy

$$\widetilde{f}_5(t) = t^2 - 4t - e^t + (t)' = t^2 - 4t + 1 - e^t.$$

Proto má příslušná soustava tvar

$$\begin{array}{llllll}
-x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4' - 2x_4 & +2x_5 & = -e^t \\
 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5' + 4x_5 & = t \\
 & & x_3' - x_3 & +x_4' - 2x_4 & +3x_5 & = 0 \\
 & & & x_4'' - 2x_4' + x_4 & x_5'' - x_5' & = t^3 - 7t + 1 - 3e^t \\
 & & & & x_5'' + x_5 & = t^2 - 4t + 1 - e^t.
\end{array}$$

Tuto soustavu řešíme odzadu. Poslední rovnice je lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana je součet dvou „speciálních pravých stran“. Po vyřešení a dosazení do čtvrté rovnice dostaneme lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana je součet tří „speciálních pravých stran“. A tak postupujeme dále.