Komentář k oddílu XIV.1: Metoda řešení rovnic se separovanými proměnnými

Obecné poznámky k tomuto druhu rovnic:

- Rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme diferenciální rovnici tvaru
$$y' = g(y) \cdot h(x),$$
kde g a h jsou reálné funkce spojité na svých definičních oborech.

- Slovní spojení „se separovanými proměnnými“ naznačuje, že pravá strana je součinem dvou výrazů, z nichž jeden závisí pouze na x (to je ono $h(x)$) a druhý pouze na y (tj. pouze na hodnotách neznámé funkce, nikoli přímo na proměnné x).

  Tedy „proměnné“ x a y jsou odděleny, separovány.

- Příkladem rovnic, v nichž proměnnné separovány nejsou, jsou třeba rovnice
$$y' = y + x$$
nebo
$$y' = y^2 + x^2.$$

- Základním tvarem pro nás bude tvar výše uvedený – kromě speciálního tvaru pravé strany je důležité i to, že na levé straně je pouze y' a na pravé straně se y' nevyskytuje.

  Je to tedy diferenciální rovnice prvního řádu „vyřešená vzhledem k y'“. To docela usnadňuje řešení.

- V literatuře se někdy rovnicemi se separovanými proměnnými rozumí rovnice ve tvaru
$$y' \cdot g(y) = h(x),$$
tj. proměnné jsou opravdu odděleny.

  Metoda řešení by byla z významné části shodná, ale některé části jsou méně intuitivní. Ilustrativní příklady budou na cvičeních.

- Dále si vysvětlíme metodu řešení těchto rovnic a zároveň si jednotlivé kroky ilustrujeme na příkladu.

Vysvětlení metody řešení a ilustrace na příkladu:

- Mějme tedy diferenciální rovnici tvaru

  $$y' = g(y) \cdot h(x),$$

  kde g a h jsou funkce spojité na svých definičních oborech.

  Zároveň uvažujme konkrétní rovnici

  $$y' = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}.$$

  Máme tedy $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ a $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

- Krok 1: Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. Na těchto intervalech budeme hledat řešení rovnice.

  Pro náš příklad je $h(x) = \frac{1}{x^2}$, a tedy máme dva otevřené intervaly

  $$(-\infty, 0) \quad \text{a} \quad (0, +\infty).$$

- Krok 2: Najdeme nulové body funkce g. Tím dostaneme stacionární (konstantní) řešení rovnice na každém z intervalů v prvním kroku.

  Pokud totiž $c \in \mathbf{R}$ je takové, že $g(c) = 0$, pak funkce $y(x) = c$ je řešením rovnice na každém z otevřených intervalů, na nichž je definovaná funkce h (to jsou ty intervaly z prvního kroku).

  Protože y je konstantní, je totiž $y' = 0$, tedy levá strana rovnice je nulová. Pravá strana je rovněž nulová, protože $g(c) = 0$ (a $y = c$).

  Pro náš příklad máme dva nulové body – 1 a -1. (Je $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, tedy $g(1) = 0$ a $g(-1) = 0$).

  Máme tedy celkem čtyři stacionární řešení:

  $$\begin{aligned} y_{s,1}(x) &= 1, \quad x \in (-\infty, 0); & y_{s,2}(x) &= -1, \quad x \in (-\infty, 0); \\ y_{s,3}(x) &= 1, \quad x \in (0, +\infty); & y_{s,4}(x) &= -1, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

- Krok 3: najdeme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g spojitá a nenulová. Tyto intervaly budou klíčové v následujícím postupu.

  V našem případě je to jediný interval, a to $(-1, 1)$.

- Krok 4: Vezmeme interval I z prvního kroku a interval J z třetího kroku. Budeme hledat řešení, která jsou definována někde v I (na nějakém otevřeném intervalu obsaženém v I) s hodnotami v intervalu J.

  Protože funkce h je spojitá na I a funkce g je spojitá a nenulová na J, každé takové řešení musí splňovat rovnici

  $$\frac{y'}{g(y)} = h(x). \tag{$\circ$}$$

  Nechť H je primitivní funkce na k funkci h na I (h je spojitá na I, proto primitivní funkce existuje).

  Nechť G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Primitivní funkce existuje, protože funkce g je spojitá a nenulová na J, a tedy funkce $\frac{1}{g}$ je spojitá na J.

  Tedy H je primitivní funkce k pravé straně v ($\circ$) a $G(y)$ je primitivní funkce k levé straně v ($\circ$).

  (Připomeňme, že y je neznámá funkce. Po dosazení konkrétní funkce je tedy levá strana

  $$\frac{y'(x)}{g(y(x))},$$

  primitivní funkce je tedy $G(y(x))$ – podle první substituční metody nebo podle věty o derivaci složené funkce.)

  Má-li se levá strana v ($\circ$) rovnat pravé straně, spočtené primitivní funkce se musí lišit o konstantu. Tedy musí platit

  $$\exists c \in \mathbf{R} : G(y(x)) = H(x) + c. \tag{$\circ\circ$}$$

  V našem případě je $I = (-\infty, 0)$ nebo $I = (0, +\infty)$ a $J = (-1, 1)$.

  Pro řešení s hodnotami v $(-1, 1)$ platí

  $$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

  Spočtěme primitivní funkce – jest $H(x) = -\frac{1}{x}$ a $G(y) = \arcsin y$. Konkrétní forma ($\circ\circ$) je

  $$\exists c \in \mathbf{R} : \arcsin y(x) = -\frac{1}{x} + c.$$

- Krok 5: Máme stále intervaly I a J z čtvrtého kroku. Zafixujeme $c \in \mathbf{R}$ a analyzujeme dále ($\circ\circ$).

  y nabývá hodnot v intervalu J, funkce G je spojitá na intervalu J, tedy levá strana ($\circ\circ$) má hodnoty v množině $G(J)$.

  Tato množina je navíc otevřený interval: G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$. Funkce $\frac{1}{g}$ je spojitá a nenulová na J, tedy je na J buď všude kladná nebo všude záporná. To ovšem znamená, že primitivní funkce G je rostoucí nebo klesající na J. Proto $G(J)$ je otevřený interval, jehož krajní body spočteme jako limity funkce G v krajních bodech J.

  Aby rovnost z ($\circ\circ$) mohla platit, musí mít pravá strana hodnoty také v $G(J)$. Proto je dalším krokem nalezení maximálních otevřených intervalů obsažených v I, na nichž platí

  $$H(x) + c \in G(J). \tag{$\square$}$$

  Protože $G(J)$ je otevřený interval, je tento vztah soustavou dvou nerovnic. Tu vyřešíme v rámci intervalu I a z množiny řešení utvoříme maximální otevřené intervaly.

  Na každém z těchto intervalů je pak řešením funkce

  $$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

  Poznamenejme, že G je rostoucí nebo klesající, takže inverzní funkce existuje.

  V našem případě je $J = (-1, 1)$ a $G(y) = \arcsin y$. Tedy $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Proto vztah ($\square$) má v tomto případě tvar

  $$-\tfrac{1}{x} + c \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),$$

  neboli

  $$-\tfrac{1}{x} \in (-\tfrac{\pi}{2} - c, \tfrac{\pi}{2} - c).$$

  Nyní je třeba rozlišit různé hodnoty c:

  - $c < -\frac{\pi}{2}$: Pak $-\frac{\pi}{2} - c > 0$. Dostaneme tedy

    $$x \in \left(-\tfrac{1}{-\frac{\pi}{2} - c}, -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2} - c}\right) = \left(\tfrac{2}{2c+\pi}, \tfrac{2}{2c-\pi}\right).$$

- $c = -\frac{\pi}{2}$. Pak $(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c) = (0, \pi)$. Tedy dostaneme

$$x \in (-\infty, -\tfrac{1}{\pi}).$$

- $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $0 \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c)$, a tedy dostaneme dvojici intervalů

$$x \in (-\infty, -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}-c}) = (-\infty, \tfrac{2}{2c-\pi}),$$
$$x \in (-\tfrac{1}{-\frac{\pi}{2}-c}, +\infty) = (\tfrac{2}{2c+\pi}, +\infty).$$

- $c = \frac{\pi}{2}$. Pak $(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c) = (-\pi, 0)$. Tedy dostaneme

$$x \in (\tfrac{1}{\pi}, +\infty,).$$

- $c > \frac{\pi}{2}$: Pak $\frac{\pi}{2} - c < 0$. Dostaneme tedy

$$x \in (-\tfrac{1}{-\frac{\pi}{2}-c}, -\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}-c}) = (\tfrac{2}{2c+\pi}, \tfrac{2}{2c-\pi}).$$

Protože inverzní funkce k funkci $G(y) = \arcsin y$ je funkce sinus (zúžená na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), dostáváme řešení dané vzorcem

$$y(x) = \sin(-\tfrac{1}{x} + c)$$

definované na spočtených intervalech. Vypíšeme-li řešení, dostaneme

$$\begin{aligned}
y_c(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + c), & x &\in (\tfrac{2}{2c+\pi}, \tfrac{2}{2c-\pi}), & c &< -\tfrac{\pi}{2} \text{ nebo } c > \tfrac{\pi}{2};\\
y_{c,1}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + c), & x &\in (-\infty, \tfrac{2}{2c-\pi}), & c &\in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2});\\
y_{c,2}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + c), & x &\in (\tfrac{2}{2c+\pi}, +\infty), & c &\in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2});\\
y_{-\frac{\pi}{2}}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} - \tfrac{\pi}{2}), & x &\in (-\infty, -\tfrac{1}{\pi});\\
y_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + \tfrac{\pi}{2}), & x &\in (\tfrac{1}{\pi}, +\infty).
\end{aligned}$$

- Krok 6: Z řešení nalezených v pátém kroku a ze stacionárních řešení slepíme všechna maximální řešení.

  Stacionární řešení z druhého kroku jsou maximální, protože jsou definována na maximálních možných intervalech.

  Ale řešení z pátého kroku nemusí být maximální – jsou maximální mezi těmi, která nabývají hodnoty z intervalu J. Proto se může stát, že řešení z pátého kroku je možné prodloužit částí stacionárního řešení.

Základním nástrojem pro toto nalepování je následující pozorování:

Nechť y_1 je řešení definované na intervalu (a,b) a y_2 je řešení definované na intervalu (b,c). Předpokládejme, že bod b patří do definičního oboru funkce h. Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x\to b-} y_1(x) = \lim_{x\to b+} y_2(x) = \alpha,$$

přičemž α patří do definičního oboru funkce g. Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a,b), \\ \alpha, & x = b, \\ y_2(x), & x \in (b,c), \end{cases}$$

je také řešením rovnice.

Důkaz: Funkce y je definovaná na intervalu (a,c) a všude kromě bodu b splňuje rovnici. Zbývá ukázat, že y splňuje rovnici i v bodě b, tj., že platí

$$y'(b) = g(y(b)) \cdot h(b) = g(\alpha) \cdot h(b).$$

Přitom funkce y je spojitá v bodě b, a tedy podle věty o dopočítávání derivace jakožto limity derivace platí

$$y'_+(b) = \lim_{x\to b+} y'(x) = \lim_{x\to b+} y_2'(x) = \lim_{x\to b+} \underbrace{g(y_2(x))}_{\to g(\alpha)} \cdot \underbrace{h(x)}_{\to h(b)} = g(\alpha) \cdot h(b).$$

Používáme spojitost funkce h – limitu funkce h počítáme dosazením. Dále používáme větu o limitě složené funkce s podmínkou (S) – funkce g je spojitá v bodě α (vzhledem ke svému definičnímu oboru).

Zcela analogicky platí

$$y'_-(b) = \lim_{x\to b-} y'(x) = \lim_{x\to b-} y_1'(x) = \lim_{x\to b-} \underbrace{g(y_1(x))}_{\to g(\alpha)} \cdot \underbrace{h(x)}_{\to h(b)} = g(\alpha) \cdot h(b).$$

Proto opravdu $y'(b) = g(\alpha) \cdot h(b)$, tedy funkce y splňuje rovnici i v bodě b.

Praktické provedení nalepování spočívá v tom, že projdeme řešení z pátého kroku, která nejsou definována na maximálních možných intervalech, spočteme jejich limity v krajních bodech a zjistíme, zda lze navázat stacionárním řešením.

Proberme možnosti nalepování v našem příkladu pro jednotlivá řešení z pátého kroku.

- $c < -\frac{\pi}{2}$. Pak je řešení

$$y_c(x) = \sin(-\tfrac{1}{x} + c)$$

definováno na intervalu

$$(\tfrac{2}{2c+\pi}, \tfrac{2}{2c-\pi}) \subset (-\infty, 0).$$

Jest

$$\lim_{x \to \frac{2}{2c+\pi}+} y_c(x) = \sin(-\tfrac{2c+\pi}{2} + c) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$
$$\lim_{x \to \frac{2}{2c-\pi}-} y_c(x) = \sin(-\tfrac{2c-\pi}{2} + c) = \sin \tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Protože 1 i -1 jsou stacionární řešení, dostáváme maximální řešení

$$y_{m,c}(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, \frac{2}{2c+\pi}\rangle, \\ \sin(-\frac{1}{x} + c), & x \in (\frac{2}{2c+\pi}, \frac{2}{2c-\pi}), \\ 1, & x \in \langle \frac{2}{2c-\pi}, 0). \end{cases}$$

- $c = -\frac{\pi}{2}$: Řešení

$$y_{-\frac{\pi}{2}}(x) = \sin(-\tfrac{1}{x} - \tfrac{\pi}{2})$$

je definováno na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{\pi})$. Doleva již zřejmě prodloužit nelze. Platí ovšem

$$\lim_{x \to -\frac{1}{\pi}-} y_{-\frac{\pi}{2}}(x) = \sin(-\pi - \tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Dostáváme tedy maximální řešení

$$y_{m,-\frac{\pi}{2}}(x) = \begin{cases} \sin(-\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}), & x \in (-\infty, -\frac{1}{\pi}), \\ 1, & \in \langle \frac{1}{\pi}, 0). \end{cases}$$

- $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Máme dvě řešení

$$\begin{aligned} y_{c,1}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + c), \quad x \in (-\infty, \tfrac{2}{2c-\pi}), \\ y_{c,2}(x) &= \sin(-\tfrac{1}{x} + c), \quad x \in (\tfrac{2}{2c+\pi}, +\infty). \end{aligned}$$

První z nich zřejmě nelze prodloužit doleva a druhé nelze prodloužít doprava. Přitom platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{2}{2c+\pi}+} y_{c,2}(x) &= \sin(-\tfrac{2c+\pi}{2} + c) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1, \\ \lim_{x \to \frac{2}{2c-\pi}-} y_{c,1}(x) &= \sin(-\tfrac{2c-\pi}{2} + c) = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy dvě maximální řešení

$$y_{m,c,1} = \begin{cases} \sin(-\frac{1}{x} + c), & x \in (-\infty, \frac{2}{2c-\pi}), \\ 1, & x \in \langle \frac{2}{2c-\pi}, 0), \end{cases}$$

$$y_{m,c,2} = \begin{cases} -1, & x \in (0, \frac{2}{2c+\pi}\rangle, \\ \sin(-\frac{1}{x} + c), & x \in (\frac{2}{2c+\pi}, +\infty). \end{cases}$$

- $c = \frac{\pi}{2}$: Řešení

$$y_{\frac{\pi}{2}}(x) = \sin(-\tfrac{1}{x} + \tfrac{\pi}{2})$$

je definováno na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$. Doprava již zřejmě prodloužit nelze. Platí ovšem

$$\lim_{x \to \frac{1}{\pi}+} y_{\frac{\pi}{2}}(x) = \sin(-\pi + \tfrac{\pi}{2}) = -1.$$

Dostáváme tedy maximální řešení

$$y_{m,\frac{\pi}{2}}(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \frac{1}{\pi}\rangle, \\ \sin(-\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}), & x \in (\frac{1}{\pi}, +\infty). \end{cases}$$

- $c > \frac{\pi}{2}$. Pak je řešení

$$y_c(x) = \sin(-\tfrac{1}{x} + c)$$

definováno na intervalu

$$(\tfrac{2}{2c+\pi}, \tfrac{2}{2c-\pi}) \subset (0, +\infty).$$

Jest

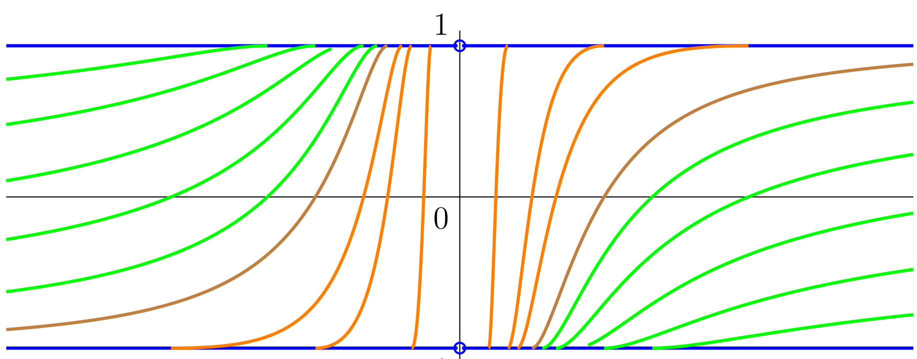
$$\lim_{x\to\frac{2}{2c+\pi}+} y_c(x) = \sin(-\tfrac{2c+\pi}{2} + c) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$
$$\lim_{x\to\frac{2}{2c-\pi}-} y_c(x) = \sin(-\tfrac{2c-\pi}{2} + c) = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Dostáváme maximální řešení

$$y_{m,c}(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \frac{2}{2c+\pi}\rangle, \\ \sin(-\frac{1}{x} + c), & x \in (\frac{2}{2c+\pi}, \frac{2}{2c-\pi}), \\ 1, & x \in \langle\frac{2}{2c-\pi}, +\infty). \end{cases}$$

Všechna maximální řešení jsou jednak stacionární řešení z druhého bodu a pak právě popsaná slepená řešení.

- Ukázali jsme si metodu řešení rovnic se separovanými proměnnými a ilustraci na jedné konkrétní rovnici. Často budeme chtít načrtnout grafy řešení. Pro náš příklad jsou grafy načrtnuté na obrázku:



obrázek opraven 3.3.2021

Modře jsou vyznačena stacionární řešení. Oranžová řešení odpovídají $c < -\frac{\pi}{2}$ a $c > \frac{\pi}{2}$ (ta lze prodloužit stacionárními řešeními na obě strany), hnědě jsou vyznačena řešení odpovídající $c = -\frac{\pi}{2}$ a $c = \frac{\pi}{2}$ a zeleně jsou vyznačena řešení odpovídající $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (ta lze stacionárním řešením prodloužit jen z jedné strany).