Komentář ke kapitole XV: Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Obecné poznámky k tomuto typu rovnic:

- Jde o rovnice tvaru
$$y' + p(x)y = q(x),$$
kde p a q jsou předem zadané funkce spojité na daném intervalu (a, b).

- Že jde o rovnice prvního řádu je zřejmé – vyskytuje se v nich první derivace neznámé funkce y a derivace vyšších řádů se v nich nevyskytuje.

  Že jde o rovnice lineární, znamená, že levou stranu lze interpretovat jako hodnotu jistého lineárního zobrazení.

  Konkrétně zobrazení $L : C^1((a, b)) \to C((a, b))$ definované předpisem
$$L(y)(x) = y'(x) + p(x)y(x), \quad x \in (a, b), y \in C^1((a, b)),$$
je lineární.

  Poznamenejme, že každé řešení rovnice je automaticky třídy C^1 na intervalu (a, b):

  Nechť y je nějaké řešení rovnice. Přímo z definice řešení plyne, že y má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní derivaci, je tedy spojité na (a, b). Navíc platí
$$y'(x) = q(x) - p(x)y(x), \quad x \in (a, b),$$
přičemž pravá strana je spojitá na (a, b). Tedy i levá strana je spojitá na (a, b), neboli $y \in C^1((a, b))$.

- To, že jde o lineární rovnici, umožňuje množinu řešení popsat pomocí Věty IX.6 – pomocí řešení homogenní rovnice (tj. nalezení jádra zobrazení L) a nalezení jednoho (partikulárního řešení nehomogenní rovnice).

Homogenní rovnice a její řešení:

- Homogenní rovnicí je rovnice s nulovou pravou stranou, tedy rovnice tvaru
$$y' + p(x)y = 0.$$
Množina řešení homogenní rovnice je tedy jádro výše definovaného zobrazení L, speciálně je to podprostor prostoru $C^1((a, b))$.

- Jedna z možností, jak řešit homogenní rovnici, je pomocí metody řešení rovnic se separovanými proměnnými, protože ji lze přepsat ve tvaru

$$y' = -p(x)y.$$

Vyřešme ji tedy:

Krok 1: Funkce p je spojitá na (a, b), na tomto intervalu hledáme řešení.

Krok 2: Stacionární řešení je $y = 0$ na (a, b).

Krok 3: Máme $g(y) = y$, tedy maximální intervaly, kde je tato funkce nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

Krok 4: Řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ nebo v $(0, +\infty)$ splňují

$$\frac{y'}{y} = -p(x),$$

tedy

$$\exists c \in \mathbf{R} : \log|y| = -P(x) + c,$$

kde P je primitivní funkce k funkci p na (a, b). (Existuje díky předpokladu spojitosti p.)

Krok 5: Funkce $y \mapsto \log|y|$ zobrazuje interval $(-\infty, 0)$ i interval $(0, +\infty)$ na $\mathbf{R}$. Proto řešení budou definována na celém intervalu (a, b).

Řešení pak splňuje

$$|y(x)| = e^{-P(x)+c} = e^c \cdot e^{-P(x)}.$$

Označíme-li $k = e^c$, je k libovolná kladná konstanta a platí

$$|y(x)| = ke^{-P(x)}.$$

Nyní rozlišíme případy, kdy $y > 0$ (řešení s hodnotami v $(0, +\infty)$) nebo $y < 0$ (řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$).

V prvním případě dostaneme

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

ve druhém

$$y(x) = -ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b).$$

Závěr: Vezmeme-li v úvahu výsledek pátého kroku a také stacionární řešení, jsou všechna řešení tvaru

$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde $k \in \mathbf{R}$.

(Pro $k = 0$ to zahrnuje stacionární řešení, pro $k > 0$ řešení s hodnotami v $(0, +\infty)$, pro $k < 0$ řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$.)

Tedy vidíme, že množina všech řešení je tvořena právě všemi násobky funkce $e^{-P(x)}$. Je to tedy vektorový podprostor dimenze 1 – báze je jednoprvková, například tvořena funkcí $e^{-P(x)}$.

Hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstanty

- Výše jsme ukázali, že množina řešení homogenní rovnice má tvar

  $$\{k \cdot y_h \colon k \in \mathbf{R}\},$$

  kde y_h je nějaké nenulové řešení homogenní rovnice (například $y_h(x) = e^{-P(x)}$, speciálně y_h nenabývá hodnoty 0).

- Jedna z metod, jak najít řešení nehomogenní rovnice je hledat ho ve tvaru $c(x)y_h(x)$, kde c je vhodná funkce. (Tato metoda se nazývá metoda variace konstanty.)

  Provede se tak, že tento tvar dosadíme do rovnice (tedy vlastně do zobrazení L):

  $$\begin{aligned} L(cy_h)(x) &= (cy_h)'(x) + p(x)c(x)y_h(x) \\ &= c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + p(x)c(x)y_h(x) \\ &= c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{\left(y_h'(x) + p(x)y_h(x)\right)}_{=L(y_h)(x)=0} = c'(x)y_h(x). \end{aligned}$$

  Kromě definic a běžných pravidel pro derivování jsme použili, že y_h je řešením homogenní rovnice, a tedy $L(y_h) = 0$.

  Hledáme-li řešení nehomogenní rovnice, hledáme funkci c, aby $L(cy_h) = q$, neboli

  $$c'(x)y_h(x) = q(x),$$

tj.

$$c'(x) = \frac{q(x)}{y_h(x)}.$$

Připomeňme, že y_h nenabývá nuly, tedy podíl na pravé straně je funkce spojitá na (a, b). Nyní stačí za c vzít nějakou primitivní funkci k funkci na pravé straně a řešení je hotovo.

- Shrnutí: Výše jsme ukázali, jak najít všechna řešení homogenní rovnice. Jsou tvaru

  $$k \cdot y_h, \quad k \in \mathbf{R},$$

  kde y_h je jedno z řešení, které nenabývá hodnoty 0.

  Dále jsme ukázali, že řešením nehomogenní rovnice je například funkce

  $$y_p(x) = c(x)y(x),$$

  kde c je primitivní funkce k funkce $\frac{q}{y_h}$ na (a, b).

  Z obecné Věty IX.6 pak plyne, že množina všech řešení nehomogenní rovnice je

  $$\{y_p + k \cdot y_h \colon k \in \mathbf{R}\}.$$

Metoda integračního faktoru:

- Výše uvedená metoda řešení dává dobrou představu o struktuře množiny řešení a využívá linearitu rovnice.

  Nicméně existuje rychlejší metoda, která přímo vede k nalezení všech řešení. Říká se jí metoda integračního faktoru. Nyní ji popíšeme a vysvětlíme.

- Připomeňme, že máme rovnici

  $$y' + p(x)y = q(x).$$

  Funkce p je spojitá na intervalu (a, b), tedy má na intervalu (a, b) primitivní funkci.

  Nechť P je nějaká primitivní funkce. (Je určena jednoznačně až na konstantu, prostě jednu zvolíme.)

Rovnici pak vynásobíme integračním faktorem $e^{P(x)}$. Tato funkce je kladná, proto vynásobení je ekvivalentní úprava. Rovnice získá tvar

$$e^{P(x)}y' + e^{P(x)}p(x)y = e^{P(x)}q(x).$$

Nyní si všimneme, že levou stranu lze vyjádřit jako derivaci součinu ($P'(x) = p(x)$, tedy $(e^{P(x)})' = e^{P(x)}p(x)$):

$$(e^{P(x)}y)' = e^{P(x)}q(x).$$

Funkce na pravé straně je nyní spojitá na intervalu (a, b), má tedy primitivní funkci. Nechť Q je nějaká primitivní funkce k funkci na pravé straně (opět jednu zvolíme).

Protože levá strana se rovná pravé, funkce $e^P y$ je primitivní funkce k levé straně a Q je primitivní funkce k pravé straně, liší se tyto dvě primitivní funkce jen o konstantu.

Tedy

$$\exists c \in \mathbf{R}\, \forall x \in (a, b)\colon e^{P(x)}y(x) = Q(x) + c,$$

po úpravě

$$y(x) = Q(x)e^{-P(x)} + ce^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), c \in \mathbf{R}.$$

To je tvar všech řešení. Při pozornějším pohledu vidíme, že je podobný tvaru získanému první metodou:

$$y(x) = \underbrace{Q(x)e^{-P(x)}}_{\text{partikulární řešení}} + \underbrace{c \cdot e^{-P(x)}}_{\text{řešení homogenní rovnice}}.$$

Existence a jednoznačnost řešení:

- Z uvedených metod řešení vyplývá, že pro lineární rovnice prvního řádu platí existence a jednoznačnost řešení.

  Přesněji:

  Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno maximální řešení, které splňuje $y(x_0) = y_0$. Navíc je definováno na celém intervalu (a, b).

- Vysvětleme to a odvoďme vzorec pro takové řešení.

  Vyjdeme z metody integračního faktoru a zvolme konkrétní primitivní funkce tak, aby v bodě x_0 měly hodnotu 0.

  Pak je
  $$P(x) = \int_{x_0}^{x} p$$
  a
  $$Q(x) = \int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p} q(t)\, dt.$$

  Tedy všechna řešení pak mají tvar
  $$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)\, dt + c \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p}, \quad x \in (a, b), c \in \mathbf{R}.$$

  Pokud za x dosadíme x_0, dostaneme
  $$y(x_0) = e^{-\int_{x_0}^{x_0} p} \cdot \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} e^{P(t)} q(t)\, dt}_{=0} + c \cdot \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x_0} p}}_{=e^0=1} = c.$$

  Proto, chceme-li, aby platilo $y(x_0) = y_0$, je jediná možnost, a to
  $$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)\, dt + y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p}, \quad x \in (a, b).$$

  To dává explicitní vzorec pro řešení splňují danou počáteční podmínku.

- To, že máme explicitní vzorec pro řešení, je užitečné zejména z teoretického hlediska. Pro praktické počítání se hodí spíše výše vysvětlené metody.