Doplňující cvičení k oddílu XVII.4

1. Zformulujte větu o opouštění kompaktu (Věta XVII.10) pro rovnice se separovanými proměnnými a v tomto případě ji dokažte pomocí metody řešení.

Návod: *Použijte úlohu 11 z doplňujících cvičení ke Kapitole XIV.*

2. Co říká věta o rovnicích s lineárním růstem (Věta XVII.12) o rovnicích se separovanými proměnnými a autonomních rovnicích?

Návod: *Použijte úlohy 5 a 9 z doplňujících cvičení ke Kapitole XIV.*

3. Z věty o rovnicích s lineárním růstem (Věta XVII.12) odvoďte druhou část Věty XVII.4 (o definičním oboru maximálních řešení lineárních soustav).

4. Z předchozí úlohy odvoďte druhou část Věty XVI.1 (o definičním oboru maximálních řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty).

Návod: *3. Ukažte, že předpoklady Věty XVII.12 jsou splněny například pro funkce* $\alpha(t) = \|\mathbb{A}(t)\|_1$ *a* $\beta(t) = \|\boldsymbol{b}(t)\|_1$ *(viz úlohy 17–26 z doplňujících cvičení k oddílu XVII.3). 4. Použijte přepis rovnice vyššího řádu na soustavu prvního řádu.*

Uvažujme Bernoulliho rovnici, tj. rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kde funkce p, q jsou spojité na intervalu (a, b) (a q není konstantně rovná nule) a $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

5. Ukažte, že pro $\alpha \in (0, 1)$ jsou maximální řešení definována na celém intervalu (a, b). Porovnejte postup, který dá metoda řešení, s možnostmi aplikace věty o rovnicích s lineárním růstem (Věta XVII.12).

6. Nechť $\alpha > 1$. Ukažte, že existuje maximální řešení, které je definované na menším intervalu než (a, b) a má v v jednom z krajních bodů limitu $+\infty$.

7. Nechť $\alpha < 0$. Ukažte, že existuje maximální řešení, které je definované na menším intervalu než (a, b) a má v v jednom z krajních bodů limitu 0.

8. Předpokládejme, že $a, b \in \mathbf{R}$ (tedy interval (a, b) je omezený) a funkce p, q jsou omezené na intervalu (a, b). Ukažte, že existuje kladné řešení, které je definováno na celém intervalu (a, b).

Návod: *5. Abychom mohli přímo aplikovat Větu XVII.12, musela by funkce $y \mapsto y^\alpha$ spojitá na $\mathbf{R}$, což platí jen pro některé hodnoty α. Nicméně pro $\alpha \in (0, 1)$ je možné uvažovat rovnice $y' + p(x)y = q(x)|y|^\alpha$ a $y' + p(x)y = -q(x)|y|^\alpha$ na kterou lze Větu XVII.12 aplikovat (a z toho odvodit tvrzení pro původní rovnici). Při použití metody řešení je třeba vyjádřit definiční obor řešení nenabývající nuly pomocí vhodných nerovností a pak ověřit, že lze nalepit nulové řešení. 6. a 7. Při aplikaci metody řešení dostaneme vzorec pro $y^{1-\alpha}$ s jedním parametrem na pravé straně. Pro vhodnou hodnotu parametru na pravé straně dostaneme řešení s požadovanou vlastností. 8. Postupujeme jako v úlohách 6 a 7. Protože primitivní funkce vzniklé při výpočtu jsou omezené, vhodná volba parametru na pravé straně zajistí, že pravá strana je kladná na (a, b).*

9. Dokažte větu o spojité závislosti na počátečních podmínkách (Věta XVII.13) pro autonomní rovnice $y' = g(y)$ pomocí metody řešení.

Návod: *Pokud g má v každém svém nulovém bodě vlastní derivaci, pak nelze nalepovat (díky Větě XIV.3(3)). Maximální řešení jsou buď stacionární nebo ryze monotónní s hodnotami v nějakém intervalu, na kterém je g nenulová. Pro taková řešení pak máme vzorec $y(x) = G^{-1}(x + c)$. Stačí si rozmyslet, co to říká o průběhu řešení.*