**Doplňující cvičení k oddílu XVII.3**

Uvažujme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \qquad (*),$$

kde $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu $n$.

1. Ukažte, že každé řešení soustavy $(*)$ je třídy $C^\infty$.

**Návod:** *Postupujte podobně jako u úloh téhož typu k předchozím oddílům – použijte, že řešení má vlastní derivaci, je tedy spojité; dále postupujte indukcí.*

2. Při řešení soustavy $(*)$ metodou eliminace se její řešení převede na postupné řešení několika lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

   Ukažte, že kořeny charakteristických polynomů těchto rovnic jsou právě vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

**Návod:** *Vlastní čísla jsou právě kořeny polynomu* $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ *(Větička IX.18). Pomocí postupu při eliminaci a vlastností determinantu (Věta VI.10) si rozmyslete, jaký je vztah mezi charakteristickými polynomy vzniklých rovnic a polynomem* $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$*.*

3. Ukažte, že každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $(*)$ splňuje $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}$, právě když každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

4. Ukažte, že každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $(*)$ splňuje $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}$, právě když každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

**Návod:** *Použijte úlohu 2, metodu eliminace, Věty XVI.4 a XVI.5 a znalost limit funkcí tvaru* $P(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ *a* $P(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$*, kde* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *a* $P$ *je polynom.*

5. Určete fundamentální matici soustavy $(*)$, pokud $\mathbb{A}$ je diagonální (a má na diagonále čísla $d_1, \dots, d_n$).

6. Určete fundamentální matici soustavy $(*)$, pokud

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

**Návod:** *V obou případech najděte obecné řešení. V úloze 5 jde o $n$ nezávislých rovnic prvního řádu, v úloze 6 není třeba provádět eliminaci, protože je předem hotova, soustavu lze tedy řešit odzadu – od poslední rovnice k první.*

7. Předpokládejme, že existuje nějaké vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$, pro které platí $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Ukažte, že existuje řešení soustavy $(*)$, které není omezené na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

8. Předpokládejme, že existuje nějaké vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$, pro které platí $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Ukažte, že existuje řešení soustavy $(*)$, které není omezené na intervalu $(-\infty, 0\rangle$.

9. Předpokládejme, že existuje nějaké vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$, pro které platí $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Ukažte, že existuje řešení soustavy $(*)$, které není omezené na $\mathbf{R}$.

**Návod:** *Použijte úlohu 2, metodu eliminace, Věty XVI.4 a XVI.5 a průběh funkce $e^{\alpha t}\cos\beta t$ (a $e^{\alpha t}\sin\beta t$) pro $\alpha > 0$ a $\alpha < 0$.*

Při řešení soustavy metodou eliminace se vezme $\lambda$-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a pomocí řádkových úprav se převede na schodovitou, tedy vlastně na horní trojúhelníkovou. Ta má na diagonále polynomy $P_{11}(\lambda), \ldots, P_{nn}(\lambda)$ – to jsou pak charakteristické polynomy nově vzniklých rovnic.

10. Nechť všechna maximální řešení soustavy $(*)$ jsou omezená na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Ukažte že pro každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ a pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\lambda$ buď není kořenem polynomu $P_{ii}$ nebo je kořenem násobnosti 1.

11. Nechť všechna maximální řešení soustavy $(*)$ jsou omezená na intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Ukažte že pro každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ a pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\lambda$ buď není kořenem polynomu $P_{ii}$ nebo je kořenem násobnosti 1.

12. Nechť všechna maximální řešení soustavy $(*)$ jsou omezená na $\mathbf{R}$. Ukažte že pro každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda = 0$ a navíc pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\lambda$ buď není kořenem polynomu $P_{ii}$ nebo je kořenem násobnosti 1.

13. Ukažte, že v úlohách 10–12 obrácená implikace neplatí.

**Návod:** *V úlohách 10–12 si rozmyslete, že první část tvrzení je vlastně přeformulování úloh 7–9. Druhou část odvoďte z Věty XVI.4, konkrétně z tvaru fundamentálního systému v případě vícenásobných kořenů. Pro úlohu 13 použijte výsledek úlohy 6 pro případ $a = 0$.*

14. Ukažte, že každé maximální řešení soustavy $(*)$ je omezené na intervalu $\langle 0, +\infty)$, právě když pro každé vlastní číslo matice $\lambda$ platí
    - $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$,
    - a pokud $\operatorname{Re} \lambda = 0$, pak násobnost $\lambda$ jakožto vlastního čísla je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.
15. Ukažte, že každé maximální řešení soustavy $(*)$ je omezené na intervalu $(-\infty, 0\rangle$, právě když pro každé vlastní číslo matice $\lambda$ platí
    - $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$,
    - a pokud $\operatorname{Re} \lambda = 0$, pak násobnost $\lambda$ jakožto vlastního čísla je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.
16. Ukažte, že každé maximální řešení soustavy $(*)$ je omezené na $\mathbf{R}$, právě když pro každé vlastní číslo matice $\lambda$ platí
    - $\operatorname{Re} \lambda = 0$,
    - násobnost $\lambda$ jakožto vlastního čísla je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.

**Návod:** *Nejprve si rozmyslet, že uvedené podmínky jsou nutné. Z úloh 7–9 dostanete nutnost první podmínky. Dále pro případ* $\operatorname{Re} \lambda = 0$ *je nutné, aby $\lambda$ bylo nejvýše kořenem násobnosti* $1$ *pro každý z polynomů $P_{ii}$. Navíc, když si uvědomíme, jako soustavu řešíme odzadu – když se dostaneme k $i$-té rovnici, je to rovnice s charakteristickým polynomem $P_{ii}$ a s pravou stranou ve speciálním tvaru (přesněji jde o součet několika speciálních pravých stran). Aby každé řešení bylo omezené na patřičném intervalu, je potřeba jednak, aby každý kořen $\lambda$ s nulovou reálnou částí měl násobnost* $1$ *(to souvisí s omezeností příslušných prvků fundamentálního systému) a jednak, aby se na pravé straně nevyskytovala část, u které to klíčové číslo z Věty XVI.5 by bylo $\lambda$ (to souvisí s omezeností partikulárního řešení). To ovšem znamená, že pro $j > i$ buď $\lambda$ není kořenem $P_{jj}$ nebo, pokud je (víme, že jen násobnosti* $1$*), pak i* $P_{ij}(\lambda) = 0$. *To ovšem přesně znamená, že násobnost*

*$\lambda$ je rovna $n -$* hodnost vzniklé trojúhelníkové matice v bodě $\lambda$ *a že hodnost vzniklé matice je rovna $h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$. Z postupu plyne, že podmínky jsou i postačující.*

**Norma matice**

Následující cvičení se týkají matic. Budou se používat jednak v další sadě cvičení, která se bude týkat alternativního často používaného vyjádření fundamentální matice, a potom v doplňujících cvičeních k oddílu XVII.4 při aplikaci vět tohoto oddílu.

17. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$. Označme
$$\|\mathbb{A}\| = \max\{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\| \colon \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}.$$
Ukažte, že maximum existuje.
18. Ukažte, že pro každnou nenulovou matici $\mathbb{A}$ je $\|\mathbb{A}\| > 0$.
19. Je-li $\mathbb{A}$ sloupcový vektor, ukažte, že $\|\mathbb{A}\|$ splývá s normou vektoru z oddílu IX.3.
20. Ukažte, že pro každou matici $\mathbb{A}$ a každé reálné číslo $t$ platí $\|t \cdot \mathbb{A}\| = |t| \cdot \|\mathbb{A}\|$.
21. Ukažte, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ stejného typu platí $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$.
22. Ukažte, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ kompatibilních typů (aby byl definován součin) platí $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \cdot \|\mathbb{B}\|$.

**Návod:** *V úloze 17 použijte větu o nabývání extrému pro spojitou funkci na kompaktní množině. V úloze 18 si rozmyslete, že pro nenulovou $\mathbb{A}$ existuje $\boldsymbol{x}$ takové, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$. V úlohách 19–21 použijte vlastnosti normy na $\mathbf{R}^n$ (Větička IX.9) a definici maxima množiny (v úloze 19 je $n = 1$). V úloze 22 nejprve dokažte, že $\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ pro sloupcový vektor $\boldsymbol{x}$ (pomocí definice a vlastností normy na $\mathbf{R}^n$).*

Pokud $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, položme

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

23. Ukažte, že pro každou matici $\mathbb{A}$ a každé reálné číslo $t$ platí $\|t \cdot \mathbb{A}\|_1 = |t| \cdot \|\mathbb{A}\|_1$.
24. Ukažte, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ stejného typu platí $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_1 \leq \|\mathbb{A}\|_1 + \|\mathbb{B}\|_1$.
25. Ukažte, že pro každé dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ kompatibilních typů (aby byl definován součin) platí $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_1 \leq \|\mathbb{A}\|_1 \cdot \|\mathbb{B}\|_1$.
26. Ukažte, že pro každou matici $\mathbb{A}$ platí $\|\mathbb{A}\| \leq \|\mathbb{A}\|_1$.

**Návod:** *V úlohách 23 a 24 použijte definici a vlastnosti absolutní hodnoty (mj. trojúhelníkovou nerovnost). V úloze 25 použijte navíc definici maticového násobení. Úlohu 26 dokažte nejprve pro matice typu* $m \times 1$ *(tj. pro sloupcový vektor) a pak použijte definici z úlohy 17 a úlohu 19.*

**Exponenciála matice a vzorec pro fundamentální matici**

Tato část cvičení je určena jen pro zájemce – týká se přímého vzorce pro fundamentální matici soustavy (∗), který se vyskytuje v literatuře a je důležitý hlavně z teoretického hlediska.

Pokud $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu $n$, definujme

$$\exp(\mathbb{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{A}^k.$$

Přitom $\mathbb{A}^k = \underbrace{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} \cdots \mathbb{A}}_{k\text{-krát}}$ a $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$. Součet nekonečné řady se myslí „po členech", tj.

$$(\exp(\mathbb{A}))_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbb{A}^k)_{ij}, \quad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

27. Ukažte, že pro každé $i,j$ je řada definující $(\exp(\mathbb{A}))_{ij}$ absolutně konvergentní, a tedy $\exp(\mathbb{A})$ je dobře definovaná.
28. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou dvě matice řádu $n$, které spolu komutují (tj. platí $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$). Ukažte, že $\exp(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \exp(\mathbb{A}) \cdot \exp(\mathbb{B})$.
29. Ukažte, že $\exp(\mathbb{O}) = \mathbb{I}$ (kde $\mathbb{O}$ je nulová matice).
30. Ukažte, že $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\exp(t\mathbb{A})-\mathbb{I}}{t} = \mathbb{A}$.

**Návod:** *V úloze 27 použijte nerovnosti* $\left|(\mathbb{A}^k)_{ij}\right| \le \left\|\mathbb{A}^k\right\|_1 \le \|\mathbb{A}\|_1^k$ *(viz úloha 25) a použijte srovnávací a podílové kritérium. V úloze 28 použijte, že pro komutující matice platí binomická věta* $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathbb{A}^j \mathbb{B}^{k-j}$ *a použijte postup z Věty VII.12 o součinu absolutně konvergentních řad. V úloze 30 spočtěte, že výraz, jehož limita se počítá, je roven* $\mathbb{A} + t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} t^k \mathbb{A}^{k+1}$ *a ukažte, že součet uvedené řady je omezený na intervalu* $\langle -1, 1\rangle$ *(podobnými odhady jako v úloze 27, navíc s tím, že* $|t| \le 1$*).*

31. Ukažte, že $\mathbb{U}(t) = \exp(t\mathbb{A})$ je fundamentální matice soustavy (∗).

**Návod:** *Nejprve ukažte, že* $\mathbb{U}(t)$ *je regulární – inverzní matice je* $\mathbb{U}(-t)$ *podle úloh 28 a 29. Pak ukažte, že* $\mathbb{U}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbb{U}(t+h) - \mathbb{U}(t)) = \mathbb{A}\mathbb{U}(t)$ *(s použitím úloh 28 a 30) a rozmyslete si, že z toho již plyne, že jde o fundamentální matici.*

32. Nechť $\mathbb{A}$ je diagonální matice. Spočtěte $\exp(\mathbb{A})$.

33. Nechť $\mathbb{A}$ je diagonální matice. Spočtěte $\exp(t\mathbb{A})$ a porovnejte s výsledkem úlohy 5.

34. Nechť $\mathbb{B}$ je matice, která má tvar z úlohy 6 pro $a = 0$. Spočtěte $\exp(t\mathbb{B})$.

35. Nechť $\mathbb{A}$ je matice, která má tvar z úlohy 6. Spočtěte $\exp(t\mathbb{A})$ a porovnejte s výsledkem úlohy 6.

**Návod.** *V úloze 32 si rozmyslete jak se násobí diagonální matice a použijte Taylorovu řadu pro exponenciální funkci. V úloze 33 použijte úlohu 32 – matice $t\mathbb{A}$ je také diagonální. V úloze 34 použijte definici a spočtěte $(t\mathbb{B})^k$ (mj. spočtěte, že pro $k \geq n$ je to nulová matice). V úloze 35 si všimněte, že $t\mathbb{A} = ta\mathbb{I} + t\mathbb{B}$ (kde $\mathbb{B}$ je matice z úlohy 34) použijte úlohy 28, 33 a 34.*