Doplňující cvičení ke Kapitole XIV

Uvažujme rovnici se separovanými proměnnými ve tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x), \tag{$*$}$$

kde g, h jsou reálné funkce spojité na svých definičních oborech.

1. Nechť $x_0 \in \operatorname{Int} D_h$ a $y_0 \in \operatorname{Int} D_g$. Ukažte, že existuje maximální řešení y rovnice $(*)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

2. Nechť g je spojitá a nenulová na intervalu (a, b) a $g(b) = 0$. Předpokládejme, že existuje vlastní derivace $g'_-(b)$. Ukažte, že řešení s hodnotami v intervalu (a, b) nelze nalepit se stacionárním řešením konstantně rovným b.

3. Předpokládejme, že funkce g má vlastní derivaci v každém bodě, kde nabývá nulové hodnoty. Nechť $x_0 \in \operatorname{Int} D_h$ a $y_0 \in \operatorname{Int} D_g$. Ukažte, že existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $(*)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

4. Předpokládejme, že h je spojitá na intervalu (α, β), g je spojitá a nenulová na intervalu (a, b) a $g(a) = g(b) = 0$. Ukažte, že maximální řešení rovnice $(*)$ s hodnotami v intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou definována na celém intervalu (α, β).

5. Předpokládejme, že h je spojitá na intervalu (α, β), g je spojitá na $\mathbf{R}$ a existují vlastní limity

   $$\lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t} \text{ a } \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{t}.$$

   Ukažte, že maximální řešení rovnice $(*)$ jsou definována na celém intervalu (α, β).

Návod: *Ve všech případech použijte metodu řešení rovnic se separovanými proměnnými. V úloze 2 navíc použijte Větu XIV.3(3), kterou aplikujete v pátém kroku řešení. V úloze 3 použijte úlohu 2. V úloze 5 použijte Větu XIV.4(2), kterou aplikujete v pátém kroku řešení, a úlohu 4.*

Dále uvažujme autonomní rovnici

$$y' = g(y), \tag{$**$}$$

kde g je reálná funkce spojitá na svém definičním oboru.

6. Předpokládejme, že g je spojitá a kladná na intervalu (a, b). Nechť y je maximální řešení rovnice $(**)$ s hodnotami v (a, b). Předpokládejme, že y je definované na intervalu (α, β). Ukažte, že

$$\lim_{x \to \beta-} y(x) = b \quad \text{a} \quad \lim_{x \to \alpha+} y(x) = a.$$

7. Zformulujte a dokažte verzi tvrzení z předchozí úlohy pro případ, že g je záporná.

8. Předpokládejme, že g je spojitá a nenulová na intervalu (a, b) a $g(a) = g(b) = 0$. Ukažte, že maximální řešení rovnice $(**)$ s hodnotami v intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou definována na $\mathbf{R}$.

9. Předpokládejme, že g je spojitá na $\mathbf{R}$ a existují vlastní limity

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t} \text{ a } \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{t}.$$

Ukažte, že maximální řešení rovnice $(**)$ jsou definována na $\mathbf{R}$.

Návod: *Autonomní rovnice jsou speciálním případem rovnic se separovanými proměnnými. V úlohách 6 a 7 využijte pátý krok metody řešení. Úlohy 8 a 9 jsou speciální (a jednodušší) případ úloh 4 a 5.*

Další úlohy:

10. Nechť $a \in \mathbf{R}$ je takové, že $g(a) = 0$ a $g'(a) < 0$.

    Ukažte, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $y_0 \in B(a, \varepsilon)$ platí:

    - Existuje maximální řešení y rovnice $(**)$ splňující počáteční podmínku $y(0) = y_0$.
    - Každé takové řešení je definováno na shora neomezeném intervalu.
    - Hodnoty takového řešení na intervalu $\langle 0, +\infty)$ jsou jednoznačně určeny (tj. pokud máme dvě taková řešení, pak se na intervalu $\langle 0, +\infty)$ shodují.
    - Řešení příslušná různým počátečním podmínkám se na intervalu $\langle 0, +\infty)$ neprotínají (tj. neshodují se v žádném bodě).
    - $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = a$.

Návod: *První bod plyne z metody řešení, druhý z Věty XIV.3(3), třetí a čtvrtý bod kombinací druhého bodu s metodou řešení. Poslední bod pak plyne z úloh 6 a 7.*

11. Předpokládejme, že h je spojitá na intervalu (α, β) a g je spojitá a nenulová na intervalu (a, b). Nechť y je jedno z řešení rovnice $(*)$ z pátého kroku, tj. maximální řešení definované na podintervalu (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b).

    Nechť je řešení y definováno na intervalu (γ, δ). Ukažte, že platí aspoň jedna z následujících podmínek:

    - $\delta = \beta$,
    - $\lim\limits_{x \to \delta-} y(x) = b$,
    - $\lim\limits_{x \to \delta-} y(x) = a$.

    Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro levý krajní bod intervalu.

Návod: *Použijte metodu řešení a důkladnou analýzu pátého kroku. Pokud $\delta < \beta$, znamená to (při značení z komentáře k oddílu XIV.1), že $H(\delta) + c \notin G((a, b))$, tedy $H(\delta) + c$ je jeden z krajních bodů intervalu $G((a, b))$.*

12. Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^1 (tedy má spojitou derivaci).

13. Nechť funkce g je definována na otevřeném intervalu J a je na něm třídy C^k pro nějaké $k \in \mathbf{N}$. Ukažte, že každé řešení rovnice $(**)$ je třídy C^{k+1}.

14. Nechť funkce g je definována na otevřeném intervalu J a je na něm třídy C^∞. Ukažte, že každé řešení rovnice $(**)$ je třídy C^∞.

15. Nechť funkce g je definována na otevřeném intervalu J a funkce h je definována na otevřeném intervalu I. Nechť dále $k \in \mathbf{N}$ a $g \in C^k(J)$ a $h \in C^k(I)$. Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^{k+1}.

16. Nechť funkce g je definována na otevřeném intervalu J a funkce h je definována na otevřeném intervalu I. Nechť dále $g \in C^\infty(J)$ a $h \in C^\infty(I)$. Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^∞.

Návod: *Každé řešení y má podle definice vlastní derivaci v každém svém bodě, tedy je spojité. Z toho, že splňuje rovnici dále vidíme, že y' je spojitá. Úlohy 13 a 15 dokazujte indukcí podle k s použitím toho, že složení dvou funkcí třídy C^k je opět funkce třídy C^k. Úlohy 14 a 16 plynou z úloh 13 a 15.*