Doplňující cvičení k oddílům XVII.1 a XVII.2

1. Rozmyslete si, že Peanovu větu o existenci (Věta XVII.2) a větu o existenci a jednoznačnosti (Větu XVII.3) lze pro rovnice se separovanými proměnnými a pro autonomní rovnice dokázat pomocí metody řešení.

Návod: *Využijte doplňující cvičení ke Kapitole XIV (konkrétně úlohy 1,2,3).*

2. Odvoďte větu o existenci a jednoznačnosti pro lineární rovnice s konstantními koeficienty (první část Věty XVI.1) z obecné věty (Věta XVII.3 případně Věta XVII.4).

3. Rozmyslete si, že fundamentální matici z oddílu XVI.3 lze interpretovat jako speciální případ fundamentální matice z oddílu XVII.2.

4. Rozmyslete si, že metoda variace konstant z oddílu XVI.3 je speciálním případem Věty XVII.8.

Návod: *Použijte vyjádření rovnice vyššího řádu jako soustavy rovnic prvního řádu.*

5. Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti pro Eulerovy rovnice na $(0, +\infty)$ a na $(-\infty, 0)$ a odvoďte ji z obecné věty (Věta XVII.3 případně Věta XVII.4).

Návod: *Vydělte rovnici nejvyšší mocninou a pak použijte vyjádření rovnice vyššího řádu jako soustavy rovnic prvního řádu.*

Uvažujme Bernoulliho rovnici, tj. rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kde funkce p, q jsou spojité na intervalu (a, b) a $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

6. V závislosti na α určete, které počáteční podmínky jsou přípustné.

7. Pomocí metody řešení ukažte, že pro každou přípustnou počáteční podmínku existuje řešení, které ji splňuje, a porovnejte s možnostmi použití Peanovy věty (Věta XVII.2).

8. Pomocí metody řešení ukažte, že nejednoznačnost může nastat jedině v bodech, kde $y = 0$. Pro které hodnoty α taková nejednoznačnost může nastat?

9. Porovnejte řešení předchozí úlohy s možností použití věty o existenci a jednoznačnosti (Věta XVII.3)

Návod: *6. Počáteční podmínka tvaru $y(x_0) = y_0$ je přípustná, pokud $x_0 \in (a, b)$ a y_0^α je definováno. 7. Použijte přímou metodu řešení pomocí integračního faktoru. 8. Při hledání řešení, která nenabývají nuly, dostaneme vzorec pro $y^{1-\alpha}$ a je potřeba, aby pravá strana byla kladná (případně záporná). To dá podmínky pro definiční obor takových řešení.*