Komentář ke Kapitole XII – Diferenční rovnice:

Motivace a nějaké příklady:

- Diferenční rovnice je rovnice, v níž neznámou je posloupnost reálných čísel.

  Taková posloupnost může vyjadřovat vývoj nějaké veličiny v čase, a to v čase diskrétním (tj. v určitých zvolených časových intervalech – třeba po dnech nebo týdnech).

  Rovnice pak může zachycovat zákonitosti vývoje příslušné veličiny.

- Ukažme nějaké příklady diferenčních rovnic, včetně ilustrace, jak mohou vznikat matematické modely přidáním zjednodušujících předpokladů.

  1. Chov králíků podle Fibonacciho:
     Modelujme chov králíků za následujících předpokladů:

     – Na začátku zakoupíme novorozený pár králíků.
     – Každý pár králíků, který je starší než jeden měsíc, zplodí každý měsíc jeden pár králíků.
     – Králíci neumírají.

     Označme a_n počet párů králíků, které budeme mít na počátku n-tého měsíce.
     Pak platí:

     (a) $a_1 = 1$ (to plyne z prvního předpokladu).
     (b) $a_2 = 1$ (dle druhého předpokladu novorozený pár nemá hned mladé).
     (c) Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
     To plyne z druhého a třetího předpokladu – počet párů králíků na začátku $(n+2)$-tého měsíce se rovná počtu párů králíků na začátku předchozího měsíce (králíci neumírají, a tak jich neubývá) plus počet párů nově narozených králíků (ten se rovná počtu párů králíků starších než měsíc, podle druhého předpokladu).

     Takto dostáváme diferenční rovnici tvaru $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ s počáteční podmínkou $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

2. Modifikovaný chov králíků:

   Předpokládejme o králících všechno tak, jako v předchozím modelu. Navíc ovšem předpokládejme, že králíky ve věku 7 měsíců prodáme (nebo sníme).

   V tom případě je jejich počet popsán vztahem

$$a_{n+7} = a_{n+6} + a_{n+5} - a_n.$$

   To je opět diferenční rovnice. Počáteční podmínky v tomto případě budou

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13.$$

3. Modifikovaný chov králíků se započtením odvodů:

   Předpokládejme o králících všechno tak, jako v předchozím modelu. Navíc předpokládejme, že každý měsíc počínaje osmým měsícem musíme 5 párů králíků odevzdat jako daň vrchnosti.

   V tom případě je jejich počet popsán diferenční rovnicí

$$a_{n+7} = a_{n+6} + a_{n+5} - a_n - 5,$$

   počáteční podmínky budou stejné jako v předchozím případě.

K definicím základním pojmů:

- Diferenční rovnice, kterými se budeme zabývat, jsou lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty.

  Obecný tvar takové rovnice je

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

  Přitom $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{R}$ jsou dané koeficienty (jde o čísla, tedy konstanty, proto „s konstantními koeficienty“). Navíc musí platit $p_k \neq 0$.

  Číslo $k \in \mathbf{N}$ se nazývá řád rovnice.

  Dále, $\{a_n\}$ je daná posloupnost reálných čísel („pravá strana“).

  Pokud je posloupnost $\{a_n\}$ konstantní nulová posloupnost, jde o homogenní rovnici.

  Rovnice z příkladu 1 je homogenní rovnice druhého řádu, rovnice z příkladu 2 je homogenní rovnice sedmého řádu a rovnice z příkladu 3 je nehomogenní rovnice sedmého řádu.

- Řešením rovnice ($*$) je každá posloupnost, která po dosazení rovnici splňuje. Neboli, posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením rovnice ($*$), pokud

$$\forall n \in \mathbf{N} : y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n.$$

- K diferenční rovnici se často přidávají počáteční podmínky, tj. požadavek, jaký má být začátek posloupnosti, která je řešením. Pro rovnici k-tého řádu se předepisuje prvních k členů posloupnosti.

  Úloha nalézt řešení diferenční rovnice, které splňuje počáteční podmínky, se nazývá „počáteční úloha.“.

Ke struktuře množiny řešení:

- Větička XII.1 a její důkaz:

  Tvrzením Větičky XII.1 je, že každá počáteční úloha má právě jedno řešení.

  Tedy, máme-li diferenční rovnici k-tého řádu (ve tvaru ($*$)) a navíc máme zadány počáteční podmínky (tj. prvních k hodnot posloupnosti), pak existuje právě jedno řešení příslušné počáteční úlohy (tj. právě jedna posloupnost, která splňuje rovnici a jejichž prvních k hodnot jsou právě zadané počáteční podmínky).

  Přitom důkaz Větičky XII.1 je zřejmý:

  Počáteční podmínky říkají, jak musí vypadat prvních k členů posloupnosti.

  Samotná rovnice pak dává vzorec pro výpočet dalšího členu posloupnosti na základě předchozích k členů:

$$y(n+k) = -p_1 y(n+k-1) - \ldots - p_k y(n) + a_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

  Je tedy opravu zřejmé, že řešení existuje (předchozí dva odstavce dávají návod, jak ho najít) a že je jediné (jiná možnost, než použít postup z předchozích dvou odstavců, není).

- Související lineární zobrazení:

  Diferenční rovnice, kterými se zabýváme, jsou mj. „lineární“. To znamená, že jsou formulovány pomocí jistého lineárního zobrazení, a lze tedy použít teorii z oddílu IX.2.

Konkrétně, zobrazení dané vzorcem

$$L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}) = \{y(n+k)+p_1y(n+k-1)+\cdots+p_ky(n)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{s},$$

je lineární zobrazení prostoru $\mathfrak{s}$ do prostoru $\mathfrak{s}$.

Připomeňme, že linearita zobrazení L znamená, že jsou splněny podmínky

- $\forall \{y(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{z(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{s}:$
  $$L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty} + \{z(n)\}_{n=1}^{\infty}) = L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}) + L(\{z(n)\}_{n=1}^{\infty});$$
- $\forall \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{s}\, \forall a \in \mathbf{R} : L(a \cdot \{y(n)\}_{n=1}^{\infty}) = a \cdot L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty})$.

Platnost obou podmínek je víceméně zřejmá. Jako ilustraci si napíšeme podrobné ověření první podmínky:

$$\begin{aligned}
L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty} + \{z(n)\}_{n=1}^{\infty}) &= L(\{y(n) + z(n)\}_{n=1}^{\infty}) \\
&= \{y(n+k) + z(n+k) + p_1(y(n+k-1) + z(n+k-1)) \\
&\qquad + \cdots + p_k(y(n) + z(n))\}_{n=1}^{\infty} \\
&= \{y(n+k) + z(n+k) + p_1y(n+k-1) + p_1z(n+k-1) \\
&\qquad + \cdots + p_ky(n) + p_kz(n)\}_{n=1}^{\infty} \\
&= \{y(n+k) + p_1y(n+k-1) + \cdots + p_ky(n)\}_{n=1}^{\infty} \\
&\qquad + \{z(n+k) + p_1z(n+k-1) + \cdots + p_kz(n)\}_{n=1}^{\infty} \\
&= L(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}) + L(\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}).
\end{aligned}$$

Ověření druhé podmínky je zcela analogické.

- Věta XII.2 a její důkaz:

  Tato věta říká, jak vypadá množina řešení homogenní rovnice. Tvrzení má dvě části, stejně jako důkaz.

  První část: Množina všech řešení homogenní rovnice je vektorový podprostor prostoru $\mathfrak{s}$.

  To plyne z toho, že množina všech řešení homogenní rovnice je vlastně jádro výše uvedeného lineárního zobrazení L.

  Z Věty IX.5 přitom víme, že jádro lineárního zobrazení je vždy vektorový podprostor.

Druhá část: Dimenze prostoru řešení homogenní rovnice je rovna k (tj. řádu rovnice).

Abychom ukázali, že dimenze je rovna k, najdeme bázi, která má k prvků. K tomu použijeme Větičku XII.1.

Důkaz rozdělíme do tří kroků:

Krok 1: Volba prvků báze.

Podle Větičky XII.1 existují posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, které jsou řešením homogenní rovnice a navíc splňují počáteční podmínky

$$\begin{array}{ccccc} y^1(1)=1, & y^1(2)=0, & y^1(3)=0, & \dots & y^1(k)=0, \\ y^2(1)=0, & y^2(2)=1, & y^2(3)=0, & \dots & y^2(k)=0, \\ y^3(1)=0, & y^3(2)=0, & y^3(3)=1, & \dots & y^3(k)=0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^k(1)=0, & y^k(2)=0, & y^k(3)=0, & \dots & y^k(k)=1. \end{array}$$

Tj. například posloupnost $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ má na prvním místě číslo 1 a na místech 2 až k číslo 0, posloupnost $\{y^3(n)\}_{n=1}^{\infty}$ má na třetím místě číslo 1, na ostatních místech až do k-tého místa má nuly atd.

Ukážeme, že těchto k posloupností tvoří bázi prostoru řešení.

Krok 2: Posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažme lineární kombinaci těchto posloupností, která je rovna nulovému vektoru (tj. konstantní nulové posloupnosti).

Neboli, mějme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ taková, že

$$\alpha_1\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty} + \alpha_2\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty} + \dots + \alpha_k\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}.$$

Toto znamená, že

$$\forall n \in \mathbf{N} : \alpha_1 y^1(n) + \alpha_2 y^2(n) + \dots + \alpha_k y^k(n) = 0.$$

Speciálně, pokud tuto rovnost aplikujeme postupně na $n = 1, 2, \dots, k$, s použitím počátečních podmínek dostaneme

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

Tedy ona lineární kombinace musí být triviální, což dokončuje důkaz lineární nezávislosti.

Krok 3: Každé řešení homogenní rovnice lze vyjádřit jako lineární kombinaci posloupností $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$.
Nechť $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolné řešení homogenní rovnice.
Uvažme posloupnost

$$\{w(n)\}_{n=1}^{\infty} = z(1)\cdot\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}+z(2)\cdot\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}+\cdots+z(k)\cdot\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty},$$

tj. posloupnost, která je lineární kombinací posloupností $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ s koeficienty $z(1), z(2), \ldots, z(k)$.
Protože posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou řešením homogenní rovnice a množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor, je i posloupnost $\{w(n)\}$ řešením homogenní rovnice (jakožto lineární kombinace řešení).
Navíc, když uvážíme počáteční podmínky, které splňují řešení $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, vidíme, že

$$w(1) = z(1), w(2) = z(2), \ldots, w(k) = z(k).$$

Nyní si uvědomme, že posloupnosti $\{w(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou obě řešením homogenní rovnice a navíc splňují stejné počáteční podmínky.
Z Větičky XII.1 nyní plyne, že se tato řešení rovnají, neboli $\{w(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$, tedy

$$\{z(n)\}_{n=1}^{\infty} = z(1)\cdot\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}+z(2)\cdot\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}+\cdots+z(k)\cdot\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Tedy řešení $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci posloupností $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$,..., $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$.
To dokončuje důkaz.

- Z Věty XII.2 víme, že množina všech řešení homogenní rovnice je vektorový podprostor dimenze k. Abychom tedy popsali všechna řešení homogenní rovnice, stačí najít bázi prostoru řešení.

  Takové bázi se pak říká „fundamentální systém řešení homogenní rovnice“.

- Věta XII.3 a její důkaz:

  Tato věta je důsledkem Věty IX.6:

Pokud totiž $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaké řešení nehomogenní rovnice $(*)$, pak podle Věty IX.6 je množina všech řešení rovna

$$\begin{aligned} &\{\{z(n)\}_{n=1}^{\infty} + \{w(n)\}_{n=1}^{\infty} \colon \{w(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ker L\} \\ = &\{\{z(n)\}_{n=1}^{\infty} + \{w(n)\}_{n=1}^{\infty} \colon \{w(n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ je řešením homogenní rovnice}\}. \end{aligned}$$

A protože řešením homogenní rovnice jsou právě lineární kombinace fundamentálního systému, dostáváme, že každé řešení je právě ve tvaru uvedeném ve znění věty.

- Kombinace předchozích vět dává standardní postup řešení lineárních diferenčních rovnic:

Krok 1: Najdeme všechna řešení homogenní rovnice. Pro ten účel najdeme fundamentální systém, tj. nějakou bázi prostoru řešení.

Krok 2: Najdeme jedno řešení nehomogenní rovnice.

Krok 3: Každé řešení nehomogenní rovnice lze pak vyjádřit jako součet onoho řešení z Kroku 2 a nějaké lineární kombinace prvků fundamentálního systému z Kroku 1.

Abychom toto teoretické schéma mohli využít v praktických výpočtech, potřebujeme nějaké metody hledání fundamentálního systému a nějaké metody, jak nalézt aspoň jedno řešení nehomogenní rovnice. Tyto metody jsou obsahem Vět XII.4 a XII.5.

- Poznámka o komplexní verzi:

  Zabýváme se diferenčními rovnicemi v reálném oboru (koeficienty $p_1, \dots, p_k$ jsou reálné, pravá strana $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, jako řešení hledáme posloupnost reálných čísel).

  Bylo by možné ovšem uvažovat diferenční rovnice i v komplexním oboru (koeficienty $p_1, \dots, p_k$ by mohly být komplexní, pravá strana $\{a_n\}$ by byla posloupnost komplexních čísel, jako řešení bychom hledali posloupnost komplexních čísel).

  V tom případě by Větička XII.1, Věta XII.2 a Věta XII.3 platily též (se zřejmými modifikacemi – například ve Větě XII.2 by šlo o podprostor prostoru $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$ posloupností komplexních čísel nebo ve Větě XII.3 by konstanty $c_1, \dots, c_k$ byly komplexní). Důkazy jsou zcela stejné jako pro reálný případ.

K Větě XII.4:

- Tato věta obsahuje konkrétní popis jednoho možného fundamentálního systému homogenní rovnice.

  Podrobný důkaz provádět nebudeme. Sestává se z několika kroků:

  - Všechny uvedené posloupnosti jsou řešením homogenní rovnice. Tuto část naznačíme níže.
  - Uvedené posloupnosti jsou lineárně nezávislé. Toto lze provést zjemněním postupu z doplňujících cvičení k oddílu IX.1.
  - Uvedených posloupností je k, což je dimenze prostoru řešení. Proto jde podle Větičky IX.4 opravdu o bázi.

- Důležitou roli ve Větě XII.4 hraje charakteristický polynom.

  Jeho důležitost ilustruje následující výpočet:

  Nechť $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Spočtěme ($L$ je výše definované lineární zobrazení):

  $$L(\{\lambda^n\}_{n=1}^\infty) = \{\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k\lambda^n\}_{n=1}^\infty = \{\lambda^n(\underbrace{\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k}_{=\chi(\lambda)})\}_{n=1}^\infty$$
  $$= \chi(\lambda) \cdot \{\lambda^n\}_{n=1}^\infty.$$

  Tedy v tomto případě platí

  $$\{\lambda^n\}_{n=1}^\infty \text{ je řešením homogenní rovnice } \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0.$$

  Proto kořeny charakteristického polynomu úzce souvisí s řešením homogenní rovnice.

- Proveďme ještě jeden výpočet (opět $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$):

  $$\begin{aligned} L(\{n\lambda^n\}_{n=1}^\infty) &= \{(n+k)\lambda^{n+k} + p_1(n+k-1)\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k n\lambda^n\}_{n=1}^\infty \\ &= \{n\lambda^{n+k} + p_1 n\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k n\lambda^n\}_{n=1}^\infty \\ &\qquad + \{k\lambda^{n+k} + p_1(k-1)\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda^{n+1}\}_{n=1}^\infty \\ &= \{n\lambda^n(\underbrace{\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k}_{=\chi(\lambda)})\}_{n=1}^\infty \\ &\qquad + \{\lambda^{n+1}(\underbrace{k\lambda^{k-1} + p_1(k-1)\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1}}_{=\chi'(\lambda)})\}_{n=1}^\infty \\ &= \chi(\lambda) \cdot \{n\lambda^n\}_{n=1}^\infty + \chi'(\lambda)\{\lambda^{n+1}\}_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Tedy platí následující:

Pokud λ je kořenem násobnosti 2 charakteristického polynomu, pak $\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0$, a tedy posloupnost $\{n\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením homogenní rovnice.

- Podobným způsobem lze dokázat následující tvrzení:

  Pokud $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je kořenem násobnosti r charakteristického polynomu, pak posloupnosti

  $$\{\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}, \{n\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{n^{r-1}\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$$

  jsou řešením homogenní rovnice.

  Toto zároveň ilustruje, jak vznikne část tabulky z Věty XII.4 odpovídající reálným kořenům charakteristického polynomu.

  (Poznamenejme, že díky předpokladu $p_k \neq 0$ není 0 kořenem charakteristického polynomu, takže reálné nenulové kořeny jsou tytéž jako reálné kořeny.)

- Nyní se podívejme na kořeny charakteristického polynomu, které nejsou reálné.

  Nechť ξ je imaginární kořen charakteristického polynomu, označme q jeho násobnost. Z Věty VIII.19 víme, že komplexně sdružené číslo $\overline{\xi}$ je také kořenem charakteristického polynomu, rovněž násobnosti q.

  Z výpočtů a úvah výše plyne, že v tomto případě posloupnosti

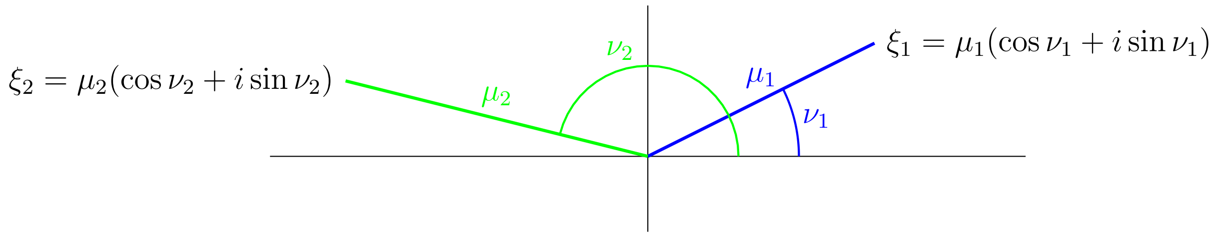
  $$\{\xi^n\}_{n=1}^{\infty}, \{n\xi^n\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{n^{q-1}\xi^n\}_{n=1}^{\infty}, \{(\overline{\xi})^n\}_{n=1}^{\infty}, \{n(\overline{\xi})^n\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{n^{q-1}(\overline{\xi})^n\}_{n=1}^{\infty}$$

  jsou řešením homogenní rovnice v komplexním oboru.

  Abychom popsali řešení v reálném oboru, použijeme goniometrický tvar komplexního čísla ξ. Předpokládejme, že ξ má kladnou imaginární část (a $\overline{\xi}$ zápornou). Pak lze vyjádřit

  $$\xi = \mu(\cos\nu + i\sin\nu),$$

  kde $\mu > 0$ ($\mu = |\xi|$) a $\nu \in (0, \pi)$. Geometrický význam je znázorněn na obrázku:



Nyní si vzpomeňme, že podle Moivreovy věty platí pro každé $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \xi^n &= (\mu(\cos\nu + i\sin\nu))^n = \mu^n(\cos n\nu + i\sin n\nu), \\ (\overline{\xi})^n &= (\mu(\cos\nu - i\sin\nu))^n = \mu^n(\cos n\nu - i\sin n\nu). \end{aligned}$$

Tedy posloupnosti

$$\begin{gathered} \{\mu^n \cos n\nu\}_{n=1}^{\infty}, \{n\mu^n \cos n\nu\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{n^{q-1}\mu^n \cos n\nu\}_{n=1}^{\infty}, \\ \{\mu^n \sin n\nu\}_{n=1}^{\infty}, \{n\mu^n \sin n\nu\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{n^{q-1}\mu^n \sin n\nu\}_{n=1}^{\infty} \end{gathered}$$

jsou řešením homogenní rovnice v reálném oboru.

(Uvědomme si, že $\mu^n \cos n\nu = \frac{1}{2}(\xi^n + (\overline{\xi})^n)$ a $\mu^n \sin n\nu = \frac{1}{2i}(\xi^n - (\overline{\xi})^n)$.)

Toto ilustruje, jak vznikne druhá část tabulky z Věty XII.4, příslušná imaginárním kořenům charakteristického polynomu.

- Shrnutí: Naznačili jsme, proč všechny posloupnosti uvedené v tabulce jsou řešením homogenní rovnice.

  Navíc těchto posloupností je přesně k: Reálnému kořenu charakteristického polynomu násobnosti r příluší r posloupností, dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q přísluší $2q$ posloupností. Protože počet kořenů, pokud každý počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost, je roven k (což je stupeň charakteristického polynomu), je posloupností v tabulce přesně k.

  Máme tedy přesně k řešení homogenní rovnice. Nyní stačí ukázat, že jsou lineárně nezávislá, a budeme vědět, že jde o bázi (to plyne z Větičky IX.4, jako bylo řečeno výše). Lineární nezávislost dokazovat nebudeme, je možné použít podrobnější variantu postupu z doplňujících cvičení k oddílu IX.1.

K Větě XII.5:

- Tato věta říká, jak lze nalézt jedno řešení nehomogenní rovnice za předpokladu, že posloupnost na pravé straně má speciální tvar.

  Zhruba řečeno – pokud pravá strana má tvar připomínající tvar fundamentálního systému řešení homogenní rovnice, existuje řešení nehomogenní rovnice podobného tvaru.

  Důkaz provádět nebudeme, ale vysvětlíme, co tato věta říká a jak ji použít.

- Předpokládejme, že číslo $\xi = \alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ není kořenem charakteristického polynomu.

  Dále, nechť R a S jsou dva polynomy s reálnými koeficienty. Pak (L je výše definované lineární zobrazení) platí:

  $L(\{\alpha^n(R(n)\cos n\nu + S(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty}) = \{\alpha^n(P(n)\cos n\nu + Q(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty}$,

  kde P a Q jsou opět polynomy s reálnými koeficienty (jiné než R a S, ale ne vyššího stupně než je vyšší ze stupňů R a S).

  Tento postřeh říká, jak aplikovat Větu XII.5: Pokud je pravá strana ve tvaru

  $$\{\alpha^n(P(n)\cos n\nu + Q(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty},$$

  pak najdeme jedno řešení ve tvaru

  $$\{\alpha^n(R(n)\cos n\nu + S(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty}.$$

  Prakticky to provedeme takto: To, co je potřeba určit, je tvar polynomů R a S. Napíšeme tedy polynomy R a S v obecném tvaru – s neznámými koeficienty, stupeň obou je nevýše roven většímu ze stupňů polynomů P a Q. Tento obecný tvar dosadíme do rovnice (tj. do zobrazení L) a určíme koeficienty tak, aby vyšla pravá strana. (To bude vyžadovat řešení jisté soustavy lineárních rovnic.)

- V případě, že pravá strana je ve tvaru

  $$\{\alpha^n(P(n)\cos n\nu + Q(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty}$$

  jako výše, přičemž číslo $\xi = \alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ je kořenem charakteristického polynomu, a to s násobností m, postupujeme velmi podobně, jen řešení hledáme ve tvaru

  $$\{n^m\alpha^n(R(n)\cos n\nu + S(n)\sin n\nu)\}_{n=1}^{\infty}.$$

- I v případě, že jeden z polynomů P, Q je nulový, mohou být oba polynomy R, S nenulové.

- V případě, že $\nu = 0$ (tj. $\xi = \alpha > 0$) nebo $\nu = \pi$ (tj. $\xi = -\alpha < 0$), je situace jednodušší.

  Pokud má v tomto případě pravá strana tvar

  $$\{\xi^n P(n)\}_{n=1}^{\infty},$$

  pak hledáme řešení ve tvaru

  $$\{\xi^n R(n)\}_{n=1}^{\infty},$$

  pokud ξ není kořenem charakteristického polynomu, resp.

  $$\{n^m \xi^n R(n)\}_{n=1}^{\infty},$$

  pokud ξ je kořenem charakteristického polynomu s násobností m.