① Logistický populační model

$$y' = ay - by^2 \qquad (a, b > 0)$$

$$y' = \underbrace{y(a - by)}_{g(y)} \qquad g(y) = ay - by^2$$

- stac. řešení: 0, $\frac{a}{b}$

g je > 0 na $(0, \frac{a}{b})$

< 0 na $(\frac{b}{a}, +\infty)$, $(-\infty, 0)$

- řešení s hodnotami v $(0, \frac{a}{b})$ jsou rostoucí

g má vlastní derivaci v 0 i v $\frac{a}{b}$

$\overset{V3(3)}{\Longrightarrow}$ $\int_{a}^{c} \frac{1}{g}$ i $\int_{c}^{\frac{a}{b}} \frac{1}{g}$ div. $\Rightarrow$ V2(a)

$(c \in (0, \frac{a}{b}))$

řešení jsou definovaná na $\mathbb{R}$

- $(\frac{a}{b}, +\infty)$: $g < 0 \Rightarrow$ řešení s hodnotami zde jsou klesající

$c \in (\frac{a}{b}, +\infty)$ lib.

- $\int_{a/b}^{c} \frac{1}{g}$ div. (V3(3) nebo ex. $g'(\frac{a}{b})$ ex.-vlast.)

$\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{g}$ konv.: $\quad g(y) = ay - by^2$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{g(y)}{y^2} = -b < 0$$

V4(1) $(\alpha = 2)$

$\Rightarrow$ řešení bude def. na $(T, +\infty)$, $T \in \mathbb{R}$

$\lim_{t\to T+} y(t) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{a}{b}$

⇒ žádné lepení

• $(-\infty, 0)$ $\quad y<0$ ⇒ řešení s hodnotami zde jsou klesající

$g'(0)$ ex. vlastní ⇒ $\int_{-1}^{0} \frac{1}{g}$ div. (V3(3))

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{g}$ konv. $\left(\lim_{y\to-\infty} \frac{g(y)}{y^2} = -b \neq 0\right)$ (V4(2))

⇒ řešení jsou na $(-\infty, T)$, $T\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$, $\lim_{x\to T-} y(x) = -\infty$

(lepení zde není)

konvexní / konkávní:

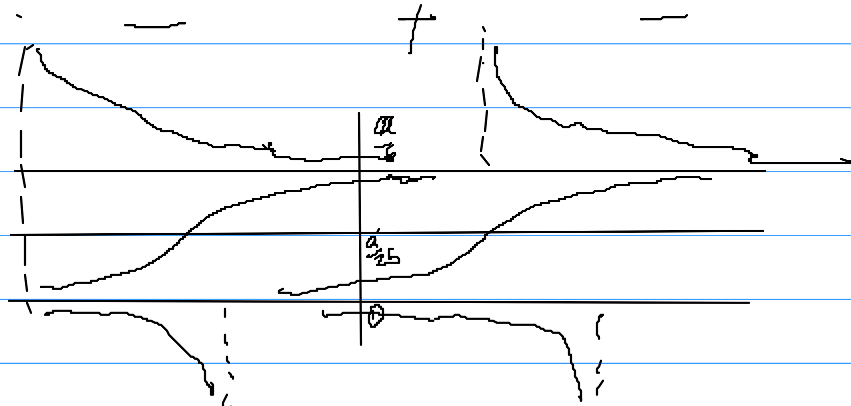
$y' = ay - by^2$

$y'' = (ay-by^2)' = ay' - 2by\cdot y' =$

$= y'(a-2by) = y(a-by)(a-2by)$

Znaménka: $\quad 0 \quad \frac{a}{2b} \quad \frac{a}{b}$

$- \quad + \quad - \quad +$



Solowův model růstu HDP:

$$Q = f(K, L)$$

kapitál pracovní síla

$$\frac{\partial f}{\partial K}, \frac{\partial f}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0$$

$$f(tK, tL) = t \cdot f(K, L), \quad t > 0$$

Zkoumáme $k = \frac{K}{L}$

$$\varphi(k) = f(k, 1), \quad \text{pak} \quad f(K, L) = L \cdot \varphi\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(k) &= \frac{\partial f}{\partial K}(k, 1) > 0 \\ \varphi''(k) &= \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(k, 1) < 0 \end{aligned}\right\} \text{ } \varphi \text{ je rostoucí ryze konkávní}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'_+(0) = +\infty, \quad \lim_{k \to +\infty} \varphi'(k) = 0$$

Vývoj:

$$K' = sQ \qquad (s > 0)$$

$$L' = \lambda L \qquad (\lambda > 0)$$

$$K = k \cdot L$$

$$k' L + k \cdot \underbrace{L'}_{\lambda L} = s L \varphi(k) \quad \Big/ : L$$

$$z' + \lambda z = s\,\phi(z)$$

$$z' = \underbrace{s\,\phi(z) - \lambda z}_{g(z)}$$ ... autonomní rovnice

$g(0)=0$, $g'(z) = s\,\phi'(z) - \lambda$, $g''(z) = \underbrace{s\,\phi''(z)}_{<0}$
pro $z>0$ ... pro $z>0$

$\Rightarrow g'$ je klesající, $\lim\limits_{z\to 0+} g'(z) = g'_+(0) = +\infty$

$\lim\limits_{z\to+\infty} g'(z) = -\lambda < 0$

$\Rightarrow \exists!\ z_0 \in (0,+\infty):\ g'(z_0) = 0$

z:	0		z_0		$+\infty$
$g(z)$		$\nearrow$		$\searrow$	
$g'(z)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\lambda$
$g''(z)$		$-$		$-$	

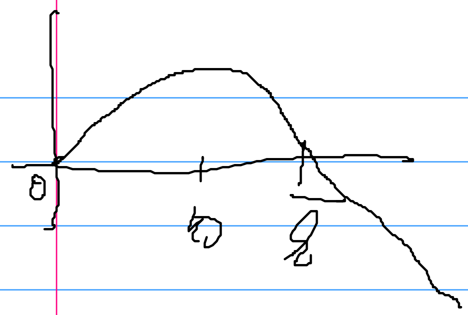
$\lim\limits_{z\to+\infty} g(z) = -\infty$ $\quad\Big[\ \exists z_1:\ \forall z \geq z_1:\ g'(z) \leq -\frac{\lambda}{2}$

pro $z \geq z_1$: $g(z) = g(z_1) + \int_{z_1}^{z} g' \leq$

$\leq g(z_1) + \int_{z_1}^{z} -\frac{\lambda}{2} =$

$\Rightarrow \exists!\ \bar{z} \in (z_0,+\infty)$:
$g(\bar{z}) = 0$

$= g(z_1) - \frac{\lambda}{2}(z - z_1) \to -\infty$



stac. řešení: $0, \bar{k}$
řešení s počátkem v $(0, \bar{k})$ jsou rostoucí

a ta s počátkem v $(\bar{k}, +\infty)$ jsou klesající)

Navíc $g'(\bar{k})$ je vlastní $\Rightarrow$ integrály u $\bar{k}$ divergují (V3(3))

$$\lim_{k \to \infty} \frac{g(k)}{k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{s\,\phi(k) - \lambda k}{k} = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{s \cdot \underbrace{\frac{\phi(k)}{k}}}_{\text{u l'H u } \frac{\infty}{+\infty}} - \lambda$$

$= -\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ integrál u $+\infty$ diverguje (V4(2)) $\qquad \lim_{k \to +\infty} s \cdot \frac{\phi'(k)}{1} = 0$

Konvergenci u $0+$ nemůžeme rozhodnout