XVI.1 Lineární rovnice s konstantními koeficienty – – struktura prostoru řešení

- **Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t),$$

  kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b). Je-li funkce f nulová, mluvíme o **homogenní rovnici**.
- Zobrazení $L : y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y$ je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^n(a, b)$ do prostoru $\mathcal{C}(a, b)$.

Věta 1 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (*), které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Větička 2.

(i) Maximální řešení homogenní rovnice jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$.

(ii) Nechť y_p je jedno řešení rovnice (*). Pak funkce y je jejím řešením, právě když lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení homogenní rovnice.

Věta 3. *Dimenze vektorového prostoru všech maximálních řešení homogenní rovnice je rovna n (tedy řádu rovnice).*

Definice. Bázi prostoru maximálních řešení nazýváme **fundamentální systém řešení**.